Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 12
DERIVATE PARIZALI E DIREZIONALI, DIFFERENZIABILITÀ:
APPROSSIMAZIONE LINEARE, TANGENZA.

Derivate parizali e direzionali

Derivate parziali - Una funzione di due variabili reali $(x, y) \mapsto f(x, y)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto alla prima variabile nel punto (a, b) se la funzione di una variabile $t \mapsto f(t, b)$ è derivabile in a. Analogamente rispetto alla seconda variabile considerando la derivabilità in b di $t \mapsto f(a, t)$.
- Per più di due variabili si estende la definizone come segue: $f(x_1, \dots, x_M)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto all' $i^a - esima$ variabile nel punto $p = (p_1, \dots, p_M)$ se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p_1 \dots, p_i + t, \dots p_M) = f(p + te_i)$ è derivabile in $t = 0$.
Equivalentemente $f(p_1 \dots, t, \dots p_M)$ è derivabile in $t = p_i$: $\exists \lim_{t\to 0} \dfrac{f(p + te_i) - f(p)}{t}$.
Per tali eventuali valori, detti *derivate parziali*, si usano le notazioni $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $\partial_{x_i} f(p)$, $\partial_i f(p)$.

<u>Osservazione:</u> per calcolare la derivata parziale di una funzione $f(x, y, z)$ rispetto alla seconda variabile in $(1, 2, 3)$ si calcola la funzione in $(1, y, 3)$ poi la derivata di $y \mapsto f(1, y, 3)$ per $y = 2$.

<u>Esempio:</u> - Per $f(x, y, z, u, v) = 3xyzuv + \left(\log \dfrac{2\cos\left(\log \frac{x^2+z^2}{u^2+v^2}\right)}{y^2 + z^2 + u^2 + v^2}\right) \cdot \text{artan } \log\left(\cos \dfrac{y^2 - z^2}{u^2 + v^2}\right)$

si ha: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1, 1, 1,) = (f(t, 1, 1, 1, 1))'_{|t=1} = \left(3t + \left(\log \dfrac{2\cos\left(\log \frac{t^2+1}{2}\right)}{4}\right) \cdot \text{ artan } \log\left(\cos \dfrac{0}{2}\right)\right)'_{|t=1} =$

$= (3t + 0)'_{|t=1} = 3.$

<u>Osservazione:</u> Una funzione vettoriale a valori in $\mathbf{R}^m$ ammette derivate direzionali se e solo se ciò accade per le sue componenti.

Funzione derivata parziale. Se in ogni $x \in D \subseteq \text{Dom} f$ vi è $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ la funzione che ad x associa la derivata parziale in x si dice *funzione derivata parziale* i^a di f e si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.
Proposizione. Sia A aperto connesso di $\mathbf{R}^M$. Allora una funzione che abbia le derivate parziali nulle in ogni punto di A è costante su A.
Dimostrazione: l'idea è la seguente: due punti di A si collegano con una spezzata con *lati paralleli agli assi*. Ma la funzione ristretta a questi lati ha derivata nulla per ipotesi quindi è costante su ognuno dei lati. In particolare ha lo stesso valore nei due arbitrari punti di A.

Derivate parziali successive. Per semplicità sia p interno a Dom$f$. Le derivate parziali successive in p, nel caso esistano, sono date induttivamente rispetto all'*ordine di derivazione* $k \in \mathbf{N}$, usando le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial^0 f}{\partial x_i^0}(p) = f(p),\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}(p) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}\right)(p) = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(p + te_{i_{k+1}})\right)'(0).$$

- Tali derivate successive, se esistono, si indicano anche con $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(p)$, $\partial_{i_k \dots i_1} f(p)$.
- Se $i_1 = \dots = i_k = i$ la derivata $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_i}(p)$ si indica anche con $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(p)$ o con $\partial_i^k f(p)$.

Osservazione: - affinchè la definizone abbia senso le derivate precedenti devono esistere su tutto un segmento per p parallelo alla direzione dell'ultima derivata.
- Per calcolarle è utile fissare le variabili rispetto a cui non vengono fatte le derivate successive.
Osservazione: come per le derivate parziali prime si considereranno le funzioni derivate parziali di ordine k.
Osservazione: - in generale *non* si può *scambiare l'ordine di derivazione*.

Esempio: $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \end{cases}.$$

- Vi sono diversi criteri che garantiscono lo scambio dell'ordine di derivazione.

Teorema di Schwarz, prima versione: $f : \mathrm{D}om f \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq i < j \leq M$, $p \in \mathrm{D}om f$ di accumulazione per $V = \{x \in \mathrm{D}om f : x_h = p_h \;\; h \neq i,\; j\}$
$[x \in V \Leftrightarrow x = (p_1, \ldots, p_{i-1}, x_i, \ldots, x_j, p_{j+1} \ldots)]$. Se in un intorno U (relativo a V) di p si ha:
1)$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x),\; \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad x \in U \cap V$
2)$\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x \in U \cap V$; allora $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$.
3)$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continua in p lungo $U \cap V$;

Corollario: se p è interno a $\mathrm{D}om f$ ed in un intorno U di p esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, $x \in U$, e la derivata seconda è continua in p allora esiste anche $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$.

Corollario : se una funzione ha tutte le derivate parziali, sino all'ordine $k \in \mathbf{N}$, *continue* allora per tali derivate si può scambiare l'ordine di derivazione.

Multindici: - Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_M) \in \mathbf{N}^M$ a componenti intere non negative, si dice *M-multi-indice*

La dimensione M si dice *lunghezza* del multi-indice.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma ℓ^1): $\quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{M} p_i$.

Dati due multindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \leq \mathbf{p}$ per $q_1 \leq p_1, \; \ldots, q_M \leq p_M$.

Si definiscono: $\mathbf{p}! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_M!$, $\quad \dbinom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \dbinom{p_1}{q_1} \cdot \ldots \cdot \dbinom{p_M}{q_M}$, $\quad \mathbf{q} \leq \mathbf{p}$,

e per d variabili $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_M)$ si pone $\mathbf{y}^{\mathbf{p}} =: y_1^{p_1} \cdot \ldots y_M^{p_M}$.

Notazione con multindici per le derivate parziali: $\dfrac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1 \ldots_{p_1 \; volte} \ldots \partial x_M \ldots_{p_M \; volte}} =$

$$= \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_M^{p_M}} = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} = \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \ldots \partial_M^{p_M} = \partial^{\mathbf{p}}$$

Spazi C^k: i-sia $A \subseteq \mathbf{R}^M$ aperto, $k \in \mathbf{N}$ o $k = \infty$. L'insieme delle funzioni che hanno le tutte le derivate parziali in A sino all'ordine k, rispettivamente di ogni ordine, si indica con $C^k(A)$.
- Tale insieme è uno *spazio vettoriale e un algebra.*
- Le derivazioni parziali sono *operatori lineari* da C^{k+1} a C^k.
ii- Se $A \subseteq \mathbf{R}^M$ è aperto. con $C^k(\overline{A})$ (in senso forte) si intende l'insieme delle f definite su $\overline{A}$ per cui vi è $\Omega \supseteq \overline{A}$ aperto, e $g \in C^k(\Omega)$ con $g_{|_{\overline{A}}} \equiv f$.
Derivate direzionali. - Una funzione $f : A \subseteq B \to C$, B e C spazi normati, si dice che ammette derivata direzionale nella direzione $v \in B$, $v \neq 0$, in un punto p del suo dominio A e di accumulazione, se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p+tv)$ è derivabile in $t = 0$.
- In altre parole: la composizione della funzione con la retta parametrica affine per p e di direzione v, $t \mapsto p + tv$, risulta derivabile per $t = 0$.
- Altrimenti: il grafico di f intersecato il piano verticale per la retta di direzione v e passante per p è il grafico di una funzione derivabile di una variabile in p.
Tale *derivata direzionale* si denota con $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$, $\partial_v f(p)$.
<u>Osservazione:</u> - Ammettere derivata parziale rispetto alla variabile *i-esima* è la stessa cosa che avere derivata direzionale nella direzione dell'*i-esimo* asse coordinato: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(p)$.
<u>Osservazione:</u> - Se f reale e continua ha derivata nella direzione v in p, e si considera il cammino sul grafico dato da $\gamma(t) = (p+tv, f(p+tv))$. Si ha che esiste $\gamma'(0) = (v, \partial_v f(p))$ il vettore velocità tangente al sostegno del cammino in$(p, f(p)) = \gamma(0)$. Quindi la derivata direzionale dà la pendenza, ortogonalmente rispetto al dominio con unità di misura $|v|_M$, della retta tangente a tale curva.
- Quindi se vi è derivata nella direzione v in p il vettore $(v, \partial_v f(p))$ intuitivamente dovrebbe essere tangente al grafico di f nel punto $(p, f(p))$ essendo ivi tangente ad un cammino, $t \mapsto (p+t, f(p+tv))$, il cui sostegno sta grafico stesso.
<u>Osservazione:</u> - Se $\rho \neq 0$ si ha $\dfrac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho \dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$: ovvero la pendenza cambia in modo omogeneo se si cambia unità di misura sull'asse di definizione della funzione.
- Se $u,\ v, u+v \neq \vec{0}$, pur esistendo le tre derivate direzionali, può essere $\dfrac{\partial f}{\partial u+v} \neq \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$.
<u>Esempio:</u> - sia $f(x,y)$ un'arbitraria funzione che valga 0 sulle bisettrici $(y = x,\ y = -x)$, e valga x sul primo asse $(y = 0)$: $\left(e.g.\ \ f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \right)$.
In $(0,0)$ tali funzioni hanno derivate parziali nelle direzioni date $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$, $u + v = (2,0)$, rispettivamente eguali a 0, 0, 2.
- Si noti che tra tali f vi sono funzioni discontinue in $(0,0)$.
<u>Esempio:</u> - Se si considerano nello spazio rette passanti per l'asse "verticale" delle z, definito da $x = y = 0$, che non siano né "verticali", né giacinti sullo stesso piano "verticale", si ottiene, escludendo l'asse verticale, un grafico "rigato" di una funzione di due variabili $f(x,y)$ nel piano delle $x,\ y$, privato dell'origine, definito da $z = 0,\ x^2 + y^2 \neq 0$. Se vi sono rette che passano per lo stesso punto $(0,0,\overline{\alpha})$ dell'asse verticale, la funzione prolungata con il valore $\overline{f}(0,0) = \overline{\alpha}$, avrà, lungo i vettori unitari delle proiezioni ortogonali sul piano delle $x,\ y$ di tali rette, derivate direzionali in $(0,0)$ uguali alle pendenze delle rette rispetto al piano.
Vista la pressochè totale arbitrarietà della scelta di tali pendenze non è detto che sussista tra loro alcuna relazione.
<u>Osservazione:</u> quindi vi possono essere grafici di funzioni reali di M variabili (che dovrebbero avere intuitivamente dimensione M) che in un punto hanno più di M vettori tangenti (a cammini con sostegno sul grafico) *linearmente indipendenti.* Ovvero l'insieme di questi vettori tangenti a cammini sul grafico può non essere un piano affine M-dimensionale in $\mathbf{R}^{M+1}$ (ambiente del grafico). Perciò l'esistenza delle derivate in ogni direzione in un punto non

comporterebbe l'esistenza di un "piano tangente": in qualsiasi senso si voglia intendere la nozione di "piano tangente ad un grafico" di una funzione di M variabili reali, questa dovrebbe definire un sottospazio affine M-dimensionale in $\mathbf{R}^{M+1}$.

Funzione derivata direzionale rispetto a direzioni variabili: qualora sia dato un campo di vettori sul dominio di f, come funzione $v : A \subseteq B \to B$ con dominio comune ad $f : A \to C$, se definita, con $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ si intende la funzione $x \in A \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v(x)}(x)$.

Derivate direzionali iterate: per semplicità sia p interno al dominio di f. Dati $(v^i)_{i\in\mathbf{N}}$ vettori non nulli, le derivate direzionali iterate rispetto ad essi, se esistono, sono date indutivamente sull'oridne di derivazione:

$$\frac{\partial^0 f}{\partial (v^i)^0}(p) = f(p),\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial v^{k+1}\ldots\partial v^1}(p) = \frac{\partial}{\partial v^{k+1}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial v^k\ldots\partial v^1}\right)(p) = \left(\frac{\partial^k f}{\partial v^k\ldots\partial v^1}(p+tv^{k+1})\right)'(0).$$

- Tali derivate successive si indicano anche con $\partial_{v^k}\ldots\partial_{v^1}f(p)$, $\partial_{v^k\ldots v^1}f(p)$.
- Se $v^1 = \cdots = v^k = v$ la derivata $\dfrac{\partial^k f}{\partial v\ldots\partial v}(p)$ si indica anche con $\dfrac{\partial^k f}{\partial (v)^k}(p)$ o con $\partial_v^k f(p)$.

Scambio dell'ordine di derivazione: vale un criterio analogo di scambio dell'ordine di derivazione per le derivate direzionali iterate con direzioni fisse. Per esempio per due derivate in direzioni indipendenti u, v, fissato il punto p in cui si deriva, ci si restringe al piano per tale punto generato dalle due direzioni. Soddisfando la funzione $g(s,t) = f(p+su+tv)$ le ipotesi del teorema di Schwarz, o dei suoi corollari, in $(0,0)$ rispetto alle variabili s, t si ottiene l'eguaglianza delle due derivate seconde direzionali miste di f in p.

Differenziabilità: approssimazione lineare e tangenza a grafici

PROBLEMATICA: a - individuare una famiglia di sottoinsimei di $\mathbf{R}^N$, oltre ai piani affini M dimensionali, $M \leq N$, per cui sia sensato dire che hanno dimensione M;
b - per un tale insieme individuare una nozione di piano M-dimensionale tangente in un suo assegnato punto p in modo che la giacitura del tangente *venga a coincidere con i vettori velocità in p di cammini passanti p e sostegni contenuti nell'insieme in questione.*

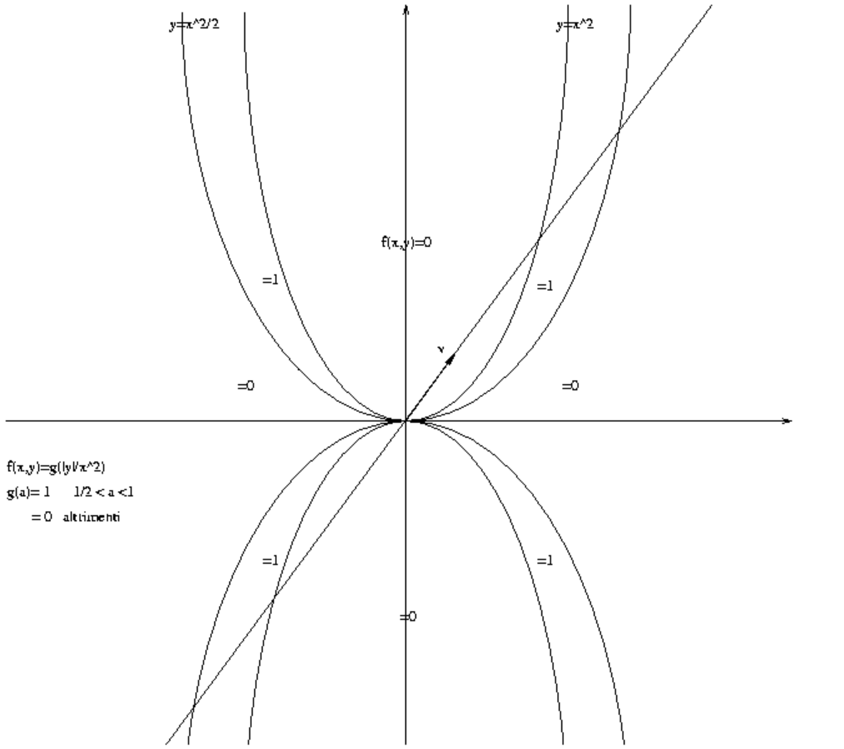
Una risposta elementare, tra le varie possibili, basata sull'analisi delle funzioni di più variabili, alla prima richiesta è la seguente:

Grafici locali, sottovarietà cfr. FT 14: RISPOSTA: a - i sottoinsiemi V di $\mathbf{R}^N$ che possono essere considerati M-dimensionali sono quelli per cui per ogni $p \in V$ vi è un intorno $U(p)$ per cui $V \cap U$ è grafico di una funzione continua di M tra le coordinate di $\mathbf{R}^N$, a valori in $\mathbf{R}^{N-M}$, identificato con il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^N$ delle rimanenti $N-M$ coordinate.
- In breve si dice che *localmente* il sottoinsieme *è un grafico* di una funzione di M variabili.
- Cioè si identifica la dimensione con il numero "dei gradi di libertà" necessari per descrivere l'insieme: cioè le M coordinate "indipendenti" della funzione.

- Come già accennato l'esistenza di tutte le derivate direzionali in un punto $p = (p_1,\ldots,p_M)$ per una funzione f di M variabili non garantisce che i vettori tangenti $(v, \partial_v f(p))$ (ai cammini $t \mapsto (p+tv, f(p+tv)) \in \mathrm{Graf} f$ e quindi intuitivamente) al grafico, formino un sottospazio affine M dimensionale.
Altri esempi:

<u>Esempio:</u> - $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \dfrac{x^2}{2} < |y| < x^2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ ovvero

$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x^2}\right)$, con $g(t) = 1$ per $\frac{1}{2} < |t| < 1$, altrimenti nulla [cfr. figura].



La funzione ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ poichè, per convessità di $y=x^2$, qualsiasi direzione $(a,b)\neq(0,0)$ dall'origine individua un segmento centrato in $(0,0)$ di $\{(x,y):|y|\geq 0\}$ ove f è nulla. Pertanto la restrizione di f a queste rette $f(ta,tb)$, essendo costante intorno all'origine, ha derivata nulla per $t=0$.
Ma la funzione risulta discontinua in $(0,0)$.

Esempio: - moltiplicando per x la funzione f si ottiene una funzione ϕ continua in $(0,0)$. Infatti f è limitata (assume due valori) ed $x\to 0$ se $x^2+y^2\to 0$.
- La ϕ ha tutte le derivate direzionali nulle in $(0,0)$ essendo nulla per convessità di $y=x^2$, su $\{(x,y):|y|\geq 0\}$. Per la richiesta fatta in b), se ci fosse un *piano tangente bidimensionale*, conterrebbe le velocità $(a,b,0)$ date da $(at,bt,\phi(ta,tb))'_{|t=0}$: dovrebbe essere il piano "orizzontale" per l'origine definito da $z=0$.
- Restringendosi invece alle parabole di apertura $\alpha\in(\frac{1}{2};1)$, o meglio considerando le composizioni $\phi(t,\alpha t^2)=t$, e considerando le curve sollevate sul grafico $(t,\alpha t^2,t)$ passanti per $(0,0,0)$, si ottengono, per $t=0$, le velocità $(1,0,1)$, che non giacciono sul candidato piano tangente.
- Si noti che per tali funzioni vale anche $\partial_u\phi(0,0+\partial_{\rho v}\phi(0,0)=\partial_{u+\rho v}\phi(0,0)=0$. Ovvero non solo esistono tutte le derivate direzionali ma sono in relazione di linearità.

Esempio: - con la stessa tecnica, moltiplicando per x una funzione che è costante su ogni curva di una "stella" di curve centrata in $(0,0)$, si ottengono altri svariati esempi di funzioni F con tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma con vettori tangenti ai cammini sul grafico sollevati di tali curve, che non descrivono un piano bidimensionale.
- Appunto considerando ancora come famiglia di cammini le parable per l'origine le funzioni del tipo $F(x,y)=xG\left(\frac{y}{x^2}\right)$, al variare di G continua di una variabile, si hanno diversi esempi di funzioni continue in ogni punto con tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ ma con velocità, in $(0,0,F(0,0))=(0,0,0)$, di cammini sul grafico non complanari:
cfr. FT5 esempio finale con $G(t)=(\sin(2\pi t))^2,\ 1<2t<2,\ G(t)=0$ altrimenti;
FT8 esempio 5 finale con $G(t)=\frac{t}{1+t^2}$.

Approssimazione lineare: RISPOSTA: b- Il concetto *sufficiente* per avere un grafico con piano tangente, che si possa studiare con gli strumenti del calcolo differenziale (le derivate parziali), è quello più impegnativo di *approssimazione lineare* della funzione:

Differenziale: $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m,\ f(x) = f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_M), \ldots f_m(x_1, \ldots, x_M))$ $(m = N - M)$, $p = (p_1, \ldots p_m)$ *interno* ad A. La funzione f si dice *differenziabile* in p se vi è una funzione lineare $L_p : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ (l'approssimante lineare) per cui

$$f(x) = f(p+v) = f(p) + L_p(x-p) + \varepsilon \ \text{ con } \ \lim_{r\to 0} \sup_{|x-p|_M \le r} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} = 0 \ (\varepsilon = o(|x-p|),\ |x-p| \to 0)$$

- Nel caso si usa la notazione $L_p = D_p f$: tale applicazione lineare si dice *differenziale* di f in p.

- Si ha per $v \in \mathbf{R}^M$: $D_p f v = (D_p f_1 v, \ldots, D_p f_m v)$.

Osservazione: - per funzioni di una variabile $M = 1$, le funzioni lineari da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^m$ sono le moltiplicazioni per un fissato vettore $a \in \mathbf{R}^m$, $L(t) = a \cdot t$, la differenziabilità è la derivabilità:

$$\exists f'(p) = a \iff \exists \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = a \iff f(x) = f(p) + a \cdot (x - p) + o(x - p)$$

Se esiste, il differenziale per funzioni di una sola variabile è la funzione lineare $u \mapsto f'(p) \cdot u$.

- Nel caso $M = 2$, $m = 1$, $p = (x_0, y_0)$, le funzioni lineari da $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$ sono i prodotti scalari per un fissato vettore $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = ax + by$, affinchè la funzione $f(x, y)$ sia differnziabile in (x_0, y_0) devono esistere due numeri a_p, b_p per cui:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$D_p f$ è quindi la forma lineare $(u, v) \mapsto au + bv = \langle (a, b) \cdot (u, v) \rangle = (a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Matrice Jacobiana: - Quindi, se esiste $D_p f$, considerando la matrice $m \times M$ associata, nelle basi canoniche, a tale applicazione lineare: $Jf(p) = (J_i^j)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le M}} = (J^1 \ldots J^M) = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{pmatrix}$

si può esprimere in modo equivalente la differenziabilità in p: la funzione f, è *differenziabile* in p se e solo se vi è una matrice $Jf(p) = J = (J_i^j)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le M}}$, $m \times M$, per cui

$$f(x) = f(p+v) = f(p) + J\ {}^t(x-p) + \varepsilon \ \text{ con } \ \lim_{r\to 0} \sup_{|x-p|_M \le r} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} \quad (\varepsilon = o(|x-p|),\ |x-p| \to 0)$$

- Tale matrice $Jf(p)$ si dice *matrice Jacobiana* di f in p.
- Le righe $J_i = Jf_i(p)$, $1 \le i \le m$, rappresentano i differenziali delle funzioni componenti $D_p f_i$:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_1^j (x_j - p_j) + o_1(|x - p|_M) \\ f_2(x) = f_2(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_2^j (x_j - p_j) + o_2(|x - p|_M) \\ \quad\vdots \\ f_m(x) = f_m(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_m^j (x_j - p_j) + o_m(|x - p|_M) \end{cases} , \quad \begin{cases} f_1(p + v) = f_1(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_1^j v_j + o_1(|v|_M) \\ f_2(p + v) = f_2(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_2^j v_j + o_2(|v|_M) \\ \quad\vdots \\ f_m(p + v) = f_m(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} J_m^j v_j + o_m(|v|_M) \end{cases}$$

Gradiente: - si dice in breve matrice *gradiente* in p di f, ivi differenziabile, la matrice $M \times m$ trasposta di $Jf(p)$: $(G_j^i)_{\substack{1\le j\le M \\ 1\le i\le m}} = (J_1 \ldots J_m) = \begin{pmatrix} J^1 \\ \vdots \\ J^M \end{pmatrix}$. Si denota con $\nabla f(p)$ o $\mathrm{grad} f(p)$.

- Le sue colonne sono i gradienti $M \times 1$ delle funzioni componenti $f_i : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le m$, $G^i = J_i = \nabla f_i(p) = {}^t Jf_i(p)$.

Importanti ed immediate conseguenze della definzione sono:

Teorema: 1) $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p interno ad A se e solo se lo sono le funzioni componenti: $D_p f = (D_p f_1, \dots, D_p f_m)$.
2) Le funzioni differenziabili in p sono uno *spazio vettoriale* e D_p è lineare:
$D_p(rf + g) = rD_p f + D_p g$.
3) - Le funzioni c costanti sono differenziabili in ogni punto p: $D_p c \equiv \mathbf{0}_{m\times M}$.
- Le funzioni lineari L sono differenziabili in ogni punto p:
il loro differenziale è costantemente uguale alla funzione stessa, $D_p L = L$.
4) Se f è differenziabile in p allora f è *continua* in p.
5) - Se f è differenziabile in p il differenziale è *unico*: esistono tutte le derivate parziali di f in p:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) = D_p f_i[e_j] = Jf_i(p)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j^o\text{posto}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (Jf(p))_i^j = \langle e_j \cdot \nabla f_i(p)\rangle = (\nabla f_i(p))_j = (\nabla f(p))_j^i$$

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\dots\dots\frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right)$$

$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix} = \big(\ \nabla f_1(p)\dots\nabla f_m(p)\ \big)\,;$$

- esistono le derivate direzionali in p per $v = (v_1, \dots, v_M) \neq 0_{\mathbf{R}^M}$: $\quad \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v}(p) \end{pmatrix} =$

$$= D_p f(p)[v] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + v_M\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) =$$

$$= \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_M\frac{\partial}{\partial x_M}\right) f(p) = (v_1, \dots, v_M)\nabla f(p) = \begin{pmatrix} \langle v \cdot \nabla f_1(p)\rangle \\ \vdots \\ \langle v \cdot \nabla f_m(p)\rangle \end{pmatrix} =: \langle v \cdot \nabla\rangle f(p)$$

$v,\ w,\ v + \rho w \in \mathbf{R}^M$ sono *non nulli*, $\rho \in \mathbf{R}$, si ha $\dfrac{\partial f}{\partial(v+\rho w)}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p) + \rho\dfrac{\partial f}{\partial w}(p)$.

Piano tangente ad un grafico

Piano tangente ad un grafico: $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, p interno ad A.
Se fè differenziabile in p si dice *piano tangente* al grafico di f in $(p, f(p))$, denotato con $T_{(p,f(p))}$, il piano M-dimensionale affine in $\mathbf{R}^{M+m}$

traslato nel punto $(p, f(p))$ del grafico del differenziale, cioè il piano M-dimensionale affine

immagine dell'applicazione affine $v \mapsto (p, f(p)) + (v, D_p f v) : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^{M+m}$,

altra $(x = v + p)$ forma parametrica $\begin{pmatrix} x \\ D_p f(x-p) + f(p) \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}_{\mathbf{R}^M} \begin{pmatrix} I_{M\times M} \\ D_p f - D_p f[p] + f(p) \end{pmatrix}$

e come luogo di zeri in $\mathbf{R}^{M+m}$ di $G : \mathbf{R}^{M+m} \to \mathbf{R}^m$, $G(x, z) = z - f(p) - D_p f[x - p]$

$$G(x,z) = (-Jf(p)|Id_{m\times m}) \begin{pmatrix} x-p \\ z-f(p) \end{pmatrix} = D_{(p,f(p))}(z - f(x)) \begin{bmatrix} x-p \\ z-f(p) \end{bmatrix} = 0_{\mathbf{R}^m} :$$

$$(*) \begin{cases} z_1 = & f_1(p) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p)(x_M - p_M) \\ \vdots & \vdots \\ z_m = & f_m(p) + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p)(x_M - p_M) \end{cases}$$

Giacitura del tangente: - il *grafico del differenziale* è un sottospazio vettoriale M-dimensionale di cui il tangente $T_{(p,f(p))}$ è il traslato. Si indica con T_p, tavolta confondendolo con il tangente.

- Considerando che $T_p = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} I_{M\times M} \\ D_p f \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(-Jf(p)|Id_{m\times m})$ e che

$$\begin{pmatrix} I_{M\times M} \\ D_p f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ \dots & & \dots\ 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\ \dots & & \dots\ 0\ 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix}$$

$$(-Jf(p)|Id_{m\times m}) = D_{(p,f(p))}(z - f(x)) = \left.\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), \dots, -\frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) & 1\ 0 \dots 0 \\ & \vdots \\ -\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p), \dots, -\frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) & \underbrace{0 \dots 0\ 1}_{\text{m}} \end{pmatrix}\right\} m, \quad \text{si ha}$$

- una *base* della giacitura *del tangente* è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j^o \text{posto}} \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p) \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} (p), \quad 1 \le j \le M;$

- una *base dell'ortogonale* alla giacitura *del tangente* $\left(-\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \dots, -\dfrac{\partial f_i}{\partial x_M}(p), 0 \dots, 1_{i^o \text{ posto}} \dots 0\right)$, $1 \le i \le m$.

- Per $m = 1$ il vettore ortogonale a T_p è $\left(-\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \dots, -\dfrac{\partial f_i}{\partial x_M}(p), 1\right) \sim \begin{pmatrix} -\nabla f(p) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Osservazione: - analogamente a quanto mostrato per le velocità di cammini (cfr. FT4 ultimo paragrafo), si deduce che il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in p è *"approssimato al primo ordine"* nel suo punto $(p, f(p))$, dal

Il senso dell'approssimazione è il seguente:
ricordando la nozione di distanza tra un punto ed un insieme $\mathrm{dist}(q, A) = \inf_{a\in A} d(q, a)$, posto $P = (p, f(p))$ (quindi con T_P si indica il piano tangente in $(p, f(p))$ al grafico di f), $Q = (x, f(x))$ per $x \in \mathrm{Dom}f$, si ha: $$\lim_{\substack{Q\in \mathrm{Graf} f\\ Q\to P}} \frac{\mathrm{dist}(Q, T_P)}{\mathrm{dist}(Q, P)} = 0.$$

Infatti, per continuità di f in p, $Q \to P$ se e solo se $x \to p$, e

$$\frac{\mathrm{dist}(Q, T_P)}{\mathrm{dist}(Q, P)} \le \frac{\mathrm{dist}(Q, T_P)}{|x - p|_M} \le \frac{|(x, f(x)) - (x, D_p f(x - p) + f(p))|_{M+m}}{|x - p|_M} =$$
$$= \frac{|f(x) - f(p) - D_p f(x - p)|_m}{|x - p|_M} \to 0\ , \quad x \to p.$$

Vettori tangenti al grafico

Vettori tangenti. Che *le velocità* in $(p, f(p))$ di cammini *sul grafico* di f, differenziabile in p, diano *tutto* $T_p f$,si deduce della regola della catena (differenziale di funzioni composte cfr. FT 13) nel caso particolare di composizione con cammini (funzioni di una variabile):

Proposizione, regola della catena per cammini: se f è differenziabile in p e $\gamma(t)$ è un cammino in Dom$f$, derivabile per t=0, con $\gamma(0) = p$, allora $f(\gamma(t))$ è derivabile per t=0 e

$$(f{\circ}\gamma)'(0) = \gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(0) = Jf(p)[\gamma'(0)] = (\gamma'(0)\cdot\nabla)f(p) = \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p).$$

Dimostrazione: per differenziabilità di f: $f(\gamma(t)) - f(p) = Jf(p)(\gamma(t) - p) + o(|\gamma(t) - p|_M)$
per derivabilità di γ: $\gamma(t) - p = \gamma'(0)t + \vec{o}(t), \qquad$ ove $|\vec{o}(t)|_M = o(t)$.
Sostituendo la seconda nella prima
$$f(\gamma(t)) - f(p) = tJf(p)(\gamma'(0)) + Jf(p)\vec{o}(t) + o(|\gamma'(0)t + \vec{o}(t)|_M)$$
- Per Cauchy-Schwarz se A è una matrice $m \times M$, $v \in \mathbf{R}^m$ si ha $|Av|_m \le |v|_M\sqrt{\sum(A_i^j)^2}$: quindi il penultimo addendo del secondo membro è un $o(t)$.
- Poichè $o(|u + v|_M) \le o(|u|_M + |v|_M)$ e se $|u|_M = o(|v|_M)$ si ha $o(|u|_M + |v|_M) = o(|u|_M)$ anche l'ultimo addendo del secondo membro è $o(t)$. Concludendo

$$f(\gamma(t)) - f(p) = tJf(p)(\gamma'(0)) + o(t), \qquad \text{cioè } \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} Jf(p)(\gamma'(0)) = \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p).$$

Corollario: se f è differenziabile in p il suo differenziale $D_p f$ è l'applicazione lineare
$$\frac{d\gamma}{dt}(0) \mapsto \frac{df{\circ}\gamma}{dt}(0),$$
per ogni γ cammino in Dom$f$, derivabile per $t = 0$ con $\gamma(0) = p$.

Teorema: La giacitura del piano tangente al grafico di f in $(p, f(p))$ sono esattamente i vettori V di $\mathbf{R}^{M+m}$, oltre a quello nullo, del tipo $V = \left(v, \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)\right)$ con $v \in \mathbf{R}^M$ non nullo: cioè del tipo $\Gamma'(0) = \left(\gamma'(0), \dfrac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p)\right)$, $\Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t))$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v \neq 0_{\mathbf{R}^M}$.

Dimostrazione: - se $\Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)) \in \mathrm{Graf}f$, con $\gamma(t)$ cammino derivabile per $t = 0$ e $\gamma(0) = p$, si ha per la regola della catena : $\Gamma'(0) = (\gamma'(0), D_p f\gamma'(0)) = \left(\gamma'(0), \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p)\right) \in T_p$.

- Per quanto visto al punto 5- del primo Teorema, tali vettori formano uno spazio vettoriale. In particolare per i cammini che danno le derivate parziali $\gamma_j(t) = p + te_j$, $1 \le j \le M$, si ha ${\Gamma_j}'(0) \sim (e_j, \partial_j f(p))$, che sono, come già osservato, una base di T_p.

Interpretazione geometrica del gradiente

Gradiente come vettore nello spazio del dominio: se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è differenziabile in p, allora $\nabla f(p)$ è *ortogonale* in p *al livello per* p, $Z\{x \in D : \ f(x) = f(p)\}$ nel senso seguente: per ogni cammino $\gamma : I \to Z$, $\gamma(0) = p$, derivabile per $t = 0$ si ha:

$$\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \langle \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Corollario, equazione del piano tangente ad un insieme di livello:
- se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è C^1 con $\nabla f(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$, e $Z = f^{-1}(\{f(p)\})$, intersecato un intorno del punto p è il grafico di una funzione reale di $(M-1)$-variabili differenziabile, il suo piano tangente $(M-1)$-dimensionale in p è ben defnito e l'equazione di questo è:

$$\langle (x-p) \cdot \nabla f(p) \rangle = (x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = 0.$$

- Se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $m < M$, è C^1 con $\nabla f(p)$ ha rango massimo m, e $Z = f^{-1}(\{f(p)\})$ ha piano tangente $(M-m)$-dimensionale in p (in un intorno di p è grafico di una funzione differnziabile di $(M-m)$-variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^M$ di dimensione m) l'equazione di questo è:

$$D_p f[x-p] = \vec{0}_{\mathbf{R}^m} \text{ cioè } \begin{cases} (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases}.$$

Cioè $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)$ sono una *base* per *l'ortogonale* della giacitura del piano tangente.

Ovvero: la giacitura del piano *tangente ad un luogo di zeri* $\{x : f(x) - f(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m}\}$ in p è il *luogo di zeri del differenziale*: $\mathrm{Ker} Jf(p)$.

Dimostrazione: per la regola della catena per la composizione con funzioni di una variabile (cfr. FT12) si ha che $t \mapsto f(\gamma(t))$ è derivabile per $t = 0$. Inoltre:

$(f_o\gamma)'(0) = \langle \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) \rangle$, e con l'ipotesi $\gamma(t) \in Z,\ t \in I$, ovvero $f(\gamma(t)) = 0,\ t \in I$, si ha

$$\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = (f_o\gamma)'(0) = 0.$$

Dimostrazione corollario: se vi è piano tangente a Z in p la sua giacitura *deve coincidere* con le velocità $v = (v_1, \ldots, v_M)$ delle curve in Z per p: come visto tali vettori devono soddisfare $v_1\partial_1 f(p) + \cdots + v_M \partial_M f(p) = 0$. Traslando in p, $v = x - p$, si ottiene quanto desiderato.

Osservazione: -in realtà il *teorema del Dini delle funzioni implicite*, FT 15, garantisce, che nelle ipotesi fatte su f (che sia C^1 in un intorno di p, con $\nabla f(p) \neq \vec{0}$) che il livello Z è effettivamente in un intorno del punto p una grafico di una funzione, e quindi è ben definito il piano tangente ($(M-1)$-dimensionale). Coincidendo la sua giacitura con le velocità dei cammini in Z e passanti per p, $\nabla f(p)$ è ortogonale ad essa.
Osservazione: - Più in generale per luoghi di zeri di funzioni vettoriali, se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $m < M$, è C^1 con l'ipotesi $\nabla f(p)$ di *rango massimo* m, si ha in effetti che l'intersezione di Z con un intorno di p è grafico di una funzione differenziabile di $(M-m)$-variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^M$ di dimensione m, e quindi $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)$ sono una *base* per *l'ortogonale* alla giacitura $(M-m)$-dimensionale del tangente a Z in p.
Quindi nelle ipotesi fatte la giacitura del tangente ad un luogo di zeri in p è il luogo di zeri del differenziale $\mathrm{Ker} Jf(p)$

Un'altra importante proprietà, quando non nullo, del gradiente in un punto p, come vettore del dominio, è quella di individuare in p la direzione di massima crescita della funzione:

Massima pendenza necessaria. Se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è differenziabile in p e $\nabla f(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$ allora: $\dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M}$ è la direzione di massima crescita di f in p. Ovvero per ogni v, $|v|_M = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) \leq |\nabla f(p)|_M = \left\langle \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M} \cdot \nabla f(p) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M}}(p).$$

Dimostrazione: per differenziabilità (cfr. Teorema FT 12): $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle v \cdot \nabla f(p) \rangle$, quindi se $|v|_M = 1$ per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (cfr. FT 2) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) \leq |\nabla f(p)|_M$.

Vale in un certo senso il viceversa, più impegnativo, che dà una condizione sufficiente per la differenziabilità in un punto p usando le derivate direzionali solo nel punto p:

Massima pendenza sufficiente. Sia f è Lipschitziana di costante L: $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|_M} \leq L$.

Se esiste v, $|v|_M = 1$ per cui esiste $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = L$, allora: f è differenziabile in p e $\nabla f(p) = Lv$.

Tangente ad immagini

<u>Osservazione:</u> - oltre che come preimmagini (luoghi di zeri o insiemi di livello) di funzioni conviene spesso descrivere un sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ come *immagine* di una funzione vettoriale. Per esempio il segmento in $\mathbf{R}^3$ di estremi $(1, 2, 3)$ ed $(4, 5, 6)$ può essere descritto come immagine della funzione lineare affine $(1, 2, 3) + t((4, 5, 6) - 1, 2, 3)) = (1, 2, 3) + t(3, 3, 3)$, ristretta ai $t \in [0; 1]$. O più in generale una "curva materiale" può essere vista come immagine (sostegno) di un cammino. - Per tali insiemi visti come immagine, come per i luoghi di zeri, è utile individuare in termini delle funzioni in gioco e delle loro derivate parziali i piani tangenti e ortogonali all'insieme.

Jacobiano nel codomino: per $m > M$, se $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M, per ogni $\Gamma : (a; b) \to D$ con $\Gamma(c) = p$, $\Gamma'(p) = v \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$ si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^m}$ è vettore tangente al cammino $t \mapsto f(\Gamma(t))$ in $f(p)$.

Dimostrazione: è lo stesso argomento usato, cfr. FT 12, per veder i vettori tangenti a un grafico basato sulla regola della catena per la composizione con cammini. Si ha infatti
$(f \circ \Gamma)'(c) = \Gamma_1(c)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \Gamma_M(c)\dfrac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = Jf(p)\Gamma'(c) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^m}$

Piano tangente ad un immagine: per $m > M$, se $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M, e se l'immagine di f intersecata un intorno di $f(p)$ è il grafico di una funzione differenziabile di M variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^m$ di dimensione $m - M$, *essendo ben definito il piano tangente* M- dimensionale ad $\mathrm{Im} f$ in $f(p)$, si ha che una *base della sua giacitura* è data dalle M derivate parziali in p di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)$$

ovvero dalle colonne di $Jf(p)$ ovvero dalle colonne di $\nabla f(p)$.

Ovvero la giacitura del piano *tangente all' immagine* $\mathrm{Im} f$ in $f(p)$

è *l'immagine del differenziale in* p: $\mathrm{Im} Jf(p)$.

$$f(p) \ + \ s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + s_M\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = Jf(p)s, \quad s = (s_1, \ldots, s_M) \in \mathbf{R}^M$$

Osservazione: in realtà vi è il corrispondente del teorema del Dini per le immagini: il *teorema del rango* (cfr. FT 6, 15), che garantisce il tangente all'immagine di una *restrizione*: - se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $M < m$, è differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M, allora f *ristretta ad un intorno* U *di* p ha immagine che è in effetti il grafico di una funzione differenziabile di M variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^m$ di dimensione $m - M$, ed *è ben definito il piano tangente* M- dimensionale ad $\mathrm{Im}_U f$ in $f(p)$, e una *base della sua giaciutura* quindi data dalle M derivate parziali in p di f.

Il differenziale del determinante

Si ricordano le nozioni di matrici dei cofattori e aggiunta, i prodotti scalari tra matrici, e la formula per la derivata del determinante di una cammino di matrici, cfr. FT 11.

- **Matrice dei cofattori, matrice aggiunta** Se matrice A è una matrice quadrata $m \times m$, si definiscono: la matrice $cofA$ dei *cofattori* $(cofA)^k_h = (-1)^{h+k} detA^{\cancel{k}}_{\cancel{h}}$
e la sua trasposta, la matrice *aggiunta* $adgA$, $(adgA)^k_h = (-1)^{h+k} detA^{\cancel{h}}_{\cancel{k}}$.
Se A è invertibile $(detA)A^{-1} = adjA$.

- **Prodotti scalari tra matrici** Identificando lo spazio $\mathcal{M}_{h\times m}$ delle matrici $h \times m$ con $\mathbf{R}^{hm}$, *e.g.* allineando verticalmente le colonne per ottenere vettori colonna $A = (A^j_i) \mapsto {}^t(A^1_1, \ldots, A^1_h, A^2_1, \ldots, A^m_1, \ldots, A^m_h)$, e orizzontalemente le righe per ottenere vettori riga $A \mapsto (A^1_1, \ldots, A^m_1, A^1_2, \ldots, A^1_h, \ldots, A^m_h)$, il prodotto scalare in $\mathbf{R}^{hm}$ diventa un prodotto scalare $\cdot_{\mathcal{M}}$ tra matrici $h \times m$: $\langle A \cdot B\rangle_{\mathbf{R}^{hm}} = \sum_i \sum_r A^i_r B^i_r = tr\,{}^t\!AB =: A \cdot_{\mathcal{M}} B$
corrispondente al prodotto righe per colonne

$$\begin{aligned} tr\,{}^t\!AB &= (({}^t\!A)^1_1, \ldots, ({}^t\!A)^h_1, ({}^t\!A)^1_2, \ldots, ({}^t\!A)^1_m, \ldots, ({}^t\!A)^h_m)\ {}^t(B^1_1, \ldots, B^1_h, B^2_1, \ldots, B^m_1, \ldots, B^m_h) = \\ &= (A^1_1, \ldots, A^1_h, A^2_1, \ldots, A^m_1, \ldots, A^m_h)\ {}^t(B^1_1, \ldots, B^1_h, B^2_1, \ldots, B^m_1, \ldots, B^m_h) \end{aligned}.$$

- **Derivate del determinante di un cammino di matrici:** sia $A : I \to \mathcal{M}_{m\times m}$ cammino di matrici, con $A^j_i(t)$ derivabili. Essendo $\det A(t)$ un polinomio nelle funzione coefficienti, è derivabile e: $$(detA)' = cofA \cdot_{\mathcal{M}} A' = tr(adjA\ A').$$
Nel caso in cui A sia invertibile si ha quindi $(detA)' = (detA)\ tr(A^{-1}A')$.

Differenziale del determinante di una matrice La funzione polinomiale

$$\det : \mathcal{M}_{m\times m} \to \mathbf{R},\ A = \{A^j_i\},\ \det(A) = \sum_{j_p \neq j_q \text{ se } p\neq q,\ 1}^{m} \text{segno}(j_1, \ldots, j_m) A^{j_1}_1 \cdot \cdots \cdot A^{j_m}_m$$

è differenziabile e, considerando le matrici vettori colonna $H \sim {}^t(H^1_1, \ldots, H^1_m, \ldots, H^m_1, \ldots, H^m_m)$:

$$\begin{aligned} (J\det(A))\,H &= tr(adjAH) = cofA \cdot_{\mathcal{M}} H = \nabla\det(A) \cdot_{\mathcal{M}} H \\ (J\det(A)) &= adjA = ((adjA)^1_1, \ldots, (adjA)^m_1, \ldots, (adjA)^1_m, \ldots, (adjA)^1_1) \text{ come riga,} \\ (\nabla\det(A)) &= cofA = {}^t((cofA)^1_1, \ldots, (cofA)^m_1, \ldots, (cofA)^1_m, \ldots, (cofA)^1_1) \text{ come colonna} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\det}{\partial A^j_i}(A) = (cofA)^j_i = (adjA)^i_j.$$

Dimostrazione: - per la differenziabilità dei polinomi in più variabili conviene usare il teorema del differenziale totale cfr. FT 13. Per una dimostrazione induttiva usando solo la defínzione di differenziabilità, basta mostrare che il prodotto di due funzioni coordinate è differenziabile:
$(x_i + h_i)(x_j + h_j) = x_i x_j + x_i h_j + h_i x_j + h_i h_j$, $x_i h_j + h_i x_j$ è lineare in h, e $h_i h_j = o(|h|_m)$.
- Si usa il corollario alla regola della catena per composizione della funzione det, con un cammino di matrici, e la formula della derivata del determinante di una cammino di matrici.
Alternativa: la matrice jacobiana $1 \times m$ (riga) di det, e la sua trasposta, matrice gradiente $m \times 1$ (colonna), sono determinate dalle derivate parziali rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^{m^2}$, corrisponenti alle m^2 matrici $B(i,j)$, $m \times m$, con solo la componente $B(i,j)^j_i$ eguale ad 1 e le altre nulle, ovvero con solo la colonna j^a non nulla uguale a $e^i_{\mathbf{R}^m}$ (base canonica di $\mathbf{R}^m$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\det}{\partial A^j_i}(A) &= \frac{d}{dt}\left(\det(A + tB(i,j))\right)_{t=0} = tr(adjAB(i,j)) = tr(\vec{0}|\ldots|\vec{0}|(adjA)^i{}_{\text{colonna } j^a}|\vec{0}|\ldots|\vec{0}) = \\ &= (adjA)^i_j \end{aligned}$$

<u>Esercizio:</u> sia $(F_1, \ldots, F_m) = F = F(t,x) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, differenziabile, $F_i \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m)$, $1 \leq i \leq m$, con $F(0,x) = x$. Posto $v(x) =: \dfrac{\partial F}{\partial t}(0,x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x))$, $J_x F(t,x)$ la matrice jacobiana delle derivate rispetto alle x, si calcoli $\dfrac{\partial \det J_x F}{\partial t}(0,x)$ in termini delle derivate parziali prime di v.

Differenziale e gradiente tangenziali 1:

Notazione: - usandosi spesso le notazioni $z = f(x)$, ovvero $\begin{cases} z_1 = f_1(x_1, \dots, x_M) \\ \vdots \\ z_m = f_m(x_1, \dots, x_M) \end{cases}$, per indicare una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, e $\dfrac{dz}{dx}$, per la derivata prima di f rispetto a x, nel caso in cui f sia di una variabile reale, è suggestivo usare per la matrice Jacobiana, similmente per la matrice gradiente, e le loro sottomatrici, le notazioni: $\quad Jf(p) = \dfrac{\partial z}{\partial(x)} = \dfrac{\partial(z_1, \dots, z_m)}{\partial(x_1, \dots, x_M)}$,

$$(Jf(p))^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_h} = \frac{\partial z_{i_1 \dots i_h}}{\partial x_{j_1 \dots j_k}} \ , \quad (Jf(p))^{\not{j}_1 \cdots \not{j}_k}_{\not{i}_1 \cdots \not{i}_h} = \frac{\partial z_{\not{i}_1 \cdots \not{i}_h}}{\partial x_{\not{j}_1 \cdots \not{j}_k}} = \frac{\partial(z_{\not{i}_1}, \dots, z_{\not{i}_h})}{\partial(x_{\not{j}_1}, \dots, x_{\not{j}_1})},$$

in breve per $I = \{i_1 < \dots < i_h]\}, \ J = \{j_1 < \dots < j_k\} : (Jf(p))^J_I = \dfrac{\partial z_I}{\partial x_J}, \quad (Jf(p))^{\not{J}}_{\not{I}} = \dfrac{\partial z_{\not{I}}}{\partial x_{\not{J}}}$.
- Selezionando le righe $I = i_1 < \dots < i_h$ non si considerano tutte le funzioni componenti di f, ma solo le proiezioni di f sugli h assi coordinati scelti I: $(Jf(p))_I = Jf_I(p)$.

- La selezione delle colonne con $J = j_1 < \dots < j_k$ piuttosto significa che si sta considerando
- - la matrice associata alla restrizione di $D_p f$ al sottospazio generato da $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$,
- - o meglio, *coerentemente alla definizione di derivata parziale*, lo Jacobiano della funzione di k variabili ottenuta *componendo* f con la parametrizzazione del sottospazio affine $p + x_{j_1} e_{j_1} + \dots + x_{j_k} e_{j_k}$: $(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \mapsto f(p + x_{j_1} e_{j_1} + \dots + x_{j_k} e_{j_k})$.

Differenziale tangenziale 1: - Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbf{R}^M$: $f : A = \overset{o}{A} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ si dice *differenziabile in* $p \in A$ *lungo* W se la sua restrizione al sottospazio affine $p + W$ è differenziabile in p.
- Il suo differenziale si dice differenziale tangenziale di f in p lungo W.
Si indica con $D^W f(p) : W \to \mathbf{R}^m$, o con $\dfrac{\partial f}{\partial W}(p)$. Se $W = \{tw\}_{t \in \mathbf{R}}$, $|w|_M = 1$: $\dfrac{\partial f}{\partial W} \sim \dfrac{\partial f}{\partial w}$.
- Se poi f è differenziabile in p, il suo differenziale lungo W è la restrizione a W di $D_p f$.
Osservazione: - si deve notare che se non si introduce una base su W *non ha senso parlare di matrice Jacobiana di* f *o di gradiente* lungo W. Può essere utile, nella pratica, riferirsi alle coordinate dello spazio $\mathbf{R}^M$ ambiente, ed usando P^W *la proiezione ortogonale su* W, che si identifica con la matrice $M \times M$ simmetrica (${}^tP = P$) ed idempotente ($PP = P, P_{|W} = Id_W$) ad essa associata, e definire due matrici, rispettivamente $m \times M$ e $M \times m$, come segue:
Matrice Jacobiana ambiente e gradiente ambiente: sono rispettivamente:

$$J^W f(p) =: Jf(p) P^W \sim D_p f P^W \quad (D_p f P^W_{|W} = D_p f_{|W} = D^W_p f) \ , \quad \nabla^W f(p) =: P^W \nabla f(p).$$

Osservazione: - data una base $\beta = \{w_1, \dots, w_k\} \subset \mathbf{R}^M$ di W, lo si identifica con $\mathbf{R}^k$.
- Si ha che f è differenziabile in p lungo W se la funzione $f^\beta \sim f_{|W}$ da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^m$ data da $p + s_1 w_1 + \dots s_k w_k \mapsto f(p + s_1 w_1 + \dots s_k w_k)$ è differenziabile in $\vec{0}_{\mathbf{R}^k}$.
- La matrice Jacobiana $Jf^\beta(0_{\mathbf{R}^k})$ di f^β è la matrice Jacobiana $J^\beta f(p)$ associata nella base β a $D^W f(p)$. È una matrice $m \times k$.
- La relazione tra $J^\beta f(p)$ e $J^W f(p)$ è la seguente: dato $w = s_1 w_1 + \dots + s_k w_k$, $s = (s_1, \dots, s_k)$
$J^\beta f(p) s = f^\beta(s) - f^\beta(0_{\mathbf{R}^k}) - o(|s|_k) = f(p + w) - f(p) - o(|w|_M) = Jf(p) w = Jf(p) P^W w =$
$= J^W f(p) w = J^W f(p)(w_1 | \dots | w_k) s$,
quindi $\qquad J^\beta f(p) = J^W f(p)(w_1 | \dots | w_k)$, matrice $m \times k$.
- Se poi β è *ortonormale* per il prodotto scalare su W dato da quello di $\mathbf{R}^M$ ha senso parlare di gradiente tangenziale $\nabla^\beta f(p) = \nabla f^\beta(0_{\mathbf{R}^k}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} \nabla f(p)$, matrice $k \times m$.

Proiezioni ortogonali: - nella pratica la difficoltà è calcolare la matrice di proiezione ortogonale su un sottospazio di $\mathbf{R}^M$ rispetto alle coordinate ambiente di $\mathbf{R}^M$, che di solito è quanto serve.
- Se si ha una base $w^1, \dots, w^k$ *ortonormale* di un sottospazio W di $\mathbf{R}^M$, espressa nelle coordinate usuali di $\mathbf{R}^M$, la matrice di proiezione è data $\left(\sum_{h=1}^{k} w_i^h w_j^h\right)_{1\le i,\ j\le M} = \sum_{h=1}^{k} w^h \otimes w^h$; invero dato $v \in \mathbf{R}^M$ la proiezione ortogonale su W è il vettore di coordinate in $\mathbf{R}^M$ $x_i = \sum_{h=1}^{k}\sum_{j=1}^{M} w_i^h w_j^h v_j$, $1 \le i \le M$, ovvero la somma di tutte le proiezioni ortogonali sui k assi ortogonali individuati dai versori ortonormali $w^1, \dots, w^k$.
- Per scrivere la matrice di proiezione ortogonale su un sottospazio W (nelle coordinate usuali dello spazio cartesiano ambiente $\mathbf{R}^M$) partendo da una base di W *qualsiasi*, $B^1, \dots, B^k$ espressa nelle coordinate usuali di $\mathbf{R}^M$, di solito non conviene ortonormalizzare la base data. Si usa una caso particolare della cosidetta *pseudoinversa (destra) di Moore-Penrose* della matrice $M \times k$ che ha come colonne le B^i e qui si indica qui con B:

$$P^W = B(\ {}^tB\ B\ )^{-1}\ {}^tB.$$

- Nel caso $k = 2$, con B^1, B^2 base di W, ed $M = 3$ la proiezione ortogonale è data sottraendo la proiezione ortogonale sull'ortogonale:

$$P^W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{|B^1 \times B^2|^2_{\mathbf{R}^3}} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot B^1 \times B^2 \right\rangle B^1 \times B^2.$$

ovvero se il piano è descritto come luogo di zeri $xu + yv + zw = 0$ (cioè una condizione di ortogonalità $\langle (x, y, z) \cdot (u, v, w)\rangle = 0$), avendosi per una qualsiasi base $B^1,\ B^2$ di W che $B^1 \times B^2$ è multiplo di $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, la proiezione è:

$$P^W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot B^1 \times B^2 \right\rangle \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

- Più in generale se W sottospazio k dimensionale di $\mathbf{R}^M$ è dato
- - come luogo di zeri lineare ${}^tVx = \vec{0}_{\mathbf{R}^{M-k}}$, con $V = (V^1| \dots |V^{M-k})$ di rango massimo,
- - cioè come spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1V_1^1 + \cdots + x_MV_M^1 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1V_1^{M-k} + \cdots + x_MV_M^{M-k} & = 0 \end{cases}$
con equazioni indipendenti,
- - ovvero da $M - k$ condizioni di ortogonalità indipendenti $\langle x \cdot V^1\rangle = 0, \dots, \langle x \cdot V^{M-k}\rangle = 0$, si ha che $V^1, \dots, V^{M-k}$ sono indipendenti, e quindi una base dell'ortogonale a W: $W^\perp$.
Pertanto la proiezione ortogonale P^W su W si può calcolare come differenza tra l'identità di $\mathbf{R}^M$ e la proiezione ortogonale $P^{W^\perp}$ su $W^\perp$:

$$P^W = I_{\mathbf{R}^M} - P^{W^\perp} = I_{\mathbf{R}^M} - V(\ {}^tVV)^{-1}\ {}^tV.$$

Proiezioni: partendo da una base $B^1, \dots, B^k$ espressa nelle coordinate usuali di $\mathbf{R}^M$, di un sottospazio W, dati un suo addendo diretto V in $\mathbf{R}^M$ ($\mathbf{R}^M = W \oplus V$ cioè $\mathbf{R}^M = W + V,\ W \cap W = \{\vec{0}_{\mathbf{R}^M}\}$) e una base $F^1, \dots, F^{M-k}$ di questo, la matrice $P = P_V^W$ associata alla proiezione su W parallela a V ($PP = P,\ \mathrm{Im}P = W,\ \mathrm{Ker\ P} = V$), si scrive agevolmente. Si considera la matrice che dà il cambiamentio di coordinate da quelle nella base di $\mathbf{R}^M$ data dalle due $(B^1, \dots, B^k, F^1, \dots, F^{M-k})$, a quelle della base canonica di $\mathbf{R}^M$. La matrice di tale cambiamento di coordinate è $(B|F) = (B^1|\dots|B^k|F^1|\dots|F^{M-k})$. La matrice P_V^W si ottiene direttamente coniugando con il cambiamento di coordinate $(B|F)$ la matrice $E^{1\dots k}E_{1\dots k}$, cfr. FT 11, di proiezione ortogonale sulle prime k coordinate canoniche di $\mathbf{R}^M$: l'identità di $\mathbf{R}^M$ con le ultime $M-k$ colonne (e quindi $M-k$ righe) poste uguali a 0. Le varie formulazioni per P_V^W

$$P_V^W = (B|F)\left(\begin{array}{c|c} Id_{k\times k} & 0_{k\times(M-k)} \\ \hline 0_{(M-k)\times k} & 0_{(M-k)\times(M-k)} \end{array}\right)(B|F)^{-1} =$$

$$= (B|F)\begin{pmatrix} Id_{k\times k} \\ 0_{(M-k)\times k} \end{pmatrix}\left(Id_{k\times k}|0_{k\times(M-k)}\right)(B|F)^{-1} = (B|F)E^{1\dots k}E_{1\dots k}(B|F)^{-1} =$$

$$= (B|0_{M\times(M-k)})(B|F)^{-1}.$$

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIABILITA' E GRADIENTE

[FS] Derivate parziali e direzionali pagg. 46-53, 83-84; Differenziale gradiente e derivate direzionali pagg. 53-70, 84-85.

[B] Derivate parziali e direzionali pagg. 275-280, 293-294, 350-351, 358-360; Differenziale e gradiente pagg.280-287, 290-292, 348-360.

[F] Aperti connessi pagg. 112-114; Derivate parziali pagg. 126-135, 153-154; Differenziale e gradiente pagg. 135-145, 176-185. DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIABILITA' E GRADIENTE

[FS] Derivate parziali e direzionali pagg. 46-53, 83-84; Differenziale gradiente e derivate direzionali pagg. 53-70, 84-85.

[B] Derivate parziali e direzionali pagg. 275-280, 293-294, 350-351, 358-360; Differenziale e gradiente pagg.280-287, 290-292, 348-360.

[F] Aperti connessi pagg. 112-114; Derivate parziali pagg. 126-135, 153-154; Differenziale e gradiente pagg. 135-145, 176-185.