Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 13
TEOREMI SULLE DERIVATE E LA DIFFERENZIABILITÀ
GENERAZIONE.

Teorema, del differenziale totale. - Sia $f : D \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, p interno a D.
Se f ha derivate direzionali nei punti di una palla centrata in p, rispetto a M vettori indipendenti $v^1, \dots, v^M$, che siano continue in p allora è differenziabile nel punto p.
- In particolare se f ha tutte le derivate parziali in un intorno di p, continue in p.
Corollario: Se $A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M$, le funzioni $C^1(\overline{A})$ sono restrizioni di funzioni differenziabili.
Osservazione: l'ipotesi del teorema è sufficente per la differenziabilità ma non necessaria.
Già per funzioni reali di una variabile reale, vi sono funzioni differenziabili, nel caso cioè derivabili, ma con funzione derivata non continua:
Esempio: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} x \neq 0 \\ 0 x = 0 \end{cases}$: $\exists f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x) - f(0)x = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, ma per $x \neq 0$ si ha $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ che per $x \to 0$ non ha limite.

La funzione differenziale: Sia A aperto di $\mathbf{R}^M$. Sia $D^1(A)$ lo spazio vettriale delle funzioni differnziabili in ogni punto di A. Sia f una funzione a valori in $\mathbf{R}^m$ e differenziabile in ogni punto di A. La funzione che associa ad un punto $x \in A$ il differenziale $D_x f$ di f in quel punto si dice *funzione differenziale* o funzione tangente della funzione f:
Tale funzione è del tipo $Df : A \mapsto \mathcal{L}in(\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^m)$.
Associando alle funzioni lineari da $\mathbf{R}^M$ in $\mathbf{R}^m$ ($\mathcal{L}in(\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^m)$) la corispondente matrice $m \times M$ si ha la *funzione Jacobiana* da A in $\mathcal{M}_{m\times M}$ data da

$$x \in A \mapsto Jf(x) \sim (\partial_1 f_1(x), \dots, \partial_M f_1(x), \dots, \partial_1 f_m(x), \dots, \partial_k f_m(x)) \in \mathbf{R}^{mM}.$$

Trasponendo si ha la funzione gradiente $x \mapsto \nabla f(x) \in \mathcal{M}_{M\times m}$.
Esempio: - si consideri in $\mathbf{R}^M$ la distanza dall'origine: $r(x) = |x|_M = \sqrt{\langle x \cdot x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_M^2}$.
- - Si ha che $r^2(x) = |x|_M^2 = \langle x \cdot x\rangle = x_1^2 + \dots + x_M^2$ è continua con derivate parziali continue $\frac{\partial r^2}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, quindi è differenziabile in $\mathbf{R}^M$ e $\nabla r^2(x) = 2x$. Ovvero, identificando $\mathcal{L}in(\mathbf{R}^M, \mathbf{R})$ con $\mathcal{M}_{1\times M}$ e quindi con $\mathbf{R}^M$, la *funzione differenziale di* r^2, è il doppio dell'identità su $A = \mathbf{R}^M$: $Dr^2 = 2Id_{\mathbf{R}^M}$ che associa ad ogni $x \in \mathbf{R}^M$ il *differenziale* di r^2 *in* x, che è la funzione lineare da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}$, $v \mapsto D_x r^2(v) = 2\langle v \cdot \nabla r^2(x)\rangle = 2\langle v \cdot x\rangle$.
- - La funzione r è continua, ha derivate parziali $\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2r}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|_M}$ continue in $\mathbf{R}^M \setminus \{\vec{0}_{\mathbf{R}^M}\}$. Quindi è differenziabile, $\nabla r(x) = \frac{x}{|x|_M} = \widehat{x}$, il *versore posizione.*
- Analogamente per una forma quadratica in $\mathbf{R}^M$: $\mathcal{Q}(x) = \langle x \cdot Qx\rangle = \sum_{h,k=1}^M Q_{hk} x_h x_k =$
$= \sum_{h=1}^M Q_{hh} x_h^2 + \sum_{h<k} (Q_{hk} + Q_{kh}) x_h x_k$, si ha $\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_i}(x) = 2Q_{ii} x_i + \sum_k (Q_{ik} + Q_{ki}) x_k = ((Q + {}^tQ)x)_i$.
Per il teorema del differenziale totale è differenziabile, e $\nabla \mathcal{Q}(x) = (Q + {}^tQ)x$, cioè $D\mathcal{Q} = (Q + {}^tQ)$, $D_x \mathcal{Q}(v) = \langle v \cdot (Q + {}^tQ)x\rangle$.

- $f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ha derivate parziali continue $\frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$. Quindi è differenziabile $J_{(r,\varphi)} f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\widehat{f} \mid f^\perp \right)$.

Teorema di Schwarz, seconda versione: se f è differenziabile in p, esistono le sue derivate parziali in ogni punto di un intorno di p, differenziabili in p, allora $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$.

Osservazione: le due versioni del teorema di scambio delle derivate seconde, questa e quella enunciata nel FT 12, non sono direttamente confrontabili.

Matrice Hessiana: nel caso in cui una funzione a valori reali e le sue derivate parziali prime siano differenziabili in p (*e.g.* $f \in C^2$) si considera la matrice *simmetrica* delle derivate parziali seconde in p, detta *matrice Hessiana* di f in p:

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_M}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_M}(p) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_M^2}(p) \end{pmatrix} = (\nabla(\nabla f))(p).$$

- Nel caso, iterando l'applicazione della regola della catena per composizione con cammini (cfr. FT 12), si ottiene direttamente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p) = \langle u \cdot Hf(p)v \rangle$.

- Con le stesse ipotesi, nel caso in cui $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è a valori vettoriali, con $Hf(p)$ si indica la "matrice con componenti vettoriali" $\left(\dfrac{\partial f_h}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \le h \le m \, {1 \le i \le M \atop 1 \le j \le M}}$.

- Se $\gamma(t)$ è un cammino in $\mathbf{R}^M$ per il cammino trasformato $\eta(t) = f(\gamma(t))$ in $\mathbf{R}^m$ si ha

$$\eta_h'' = \langle \gamma'' \cdot \nabla f_{h(\gamma)} \rangle + \langle \gamma' \cdot Hf_{h(\gamma)} \gamma' \rangle.$$

Laplaciano: se f è differenziabile con derivate parziali prime differenziabili in x, la *traccia della matrice Hessiana* si dice *Laplaciano* di f. È la somma delle derivate parziali seconde non miste. Si indica con $\Delta f(x) =: \mathrm{tr} Hf(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_M^2}(x)$.

- L'importanza della trasformazione lineare tra funzioni $f \mapsto \Delta f$, deriva dall'invarianza della traccia per cambiamenti di coordinate lineari: è l'unica trasformazione che associa ad una funzione una combinazione lineare delle sue derivate parziali seconde che non cambia per cambiamenti di *coordinate ortonormali.* L'unica per cui se R è la matrice di un cambiamento di coordiate $x = Ry$ ortonormale ($R^{-1} = {}^tR$), data $f(x)$, si ha $\Delta_y(f_o R)(y) = (\Delta_x f)(Ry)$.

<u>Esempi:</u> - $r(x) = |x|_M = \sqrt{\langle x \cdot x \rangle}$: $\dfrac{\partial^2 r^2}{\partial x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(2x_J) = \begin{cases} 2, \, i = j \\ 0, \, i \neq j \end{cases} =: 2\delta_{ij}$.

Quindi $Hr^2(x) = 2Id_{\mathbf{R}^M}$ è costante, e $\Delta r^2(x) = 2M$.

- - $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_j}{|x|_M}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_j}{r}\right) = \dfrac{r\delta_{ij} - x_j \frac{x_i}{r}}{r^2} = \dfrac{1}{r}(\delta_{ij} - \dfrac{x_i}{r}\dfrac{x_j}{r})$.

Quindi $H|x|_M = \dfrac{1}{|x|_M}(Id_{\mathbf{R}^M} - \widehat{x} \otimes \widehat{x})$, e $\Delta |x|_M = \dfrac{M}{|x|} - \dfrac{\frac{x_1^2}{|x|} + \dots + \frac{x_M^2}{|x|}}{|x|} = \dfrac{M-1}{|x|_M}$.

- Per $\mathcal{Q}(x) = \langle x \cdot Qx \rangle = \displaystyle\sum_{h,k=1}^{M} Q_{hk} x_h x_k$: $\nabla(\nabla \mathcal{Q})(x) = \nabla\left((Q + {}^tQ)x\right) = Q + {}^tQ$, essendo lineare $x \mapsto (Q + {}^tQ)x$. Quindi $H\mathcal{Q}(x) = Q + {}^tQ$ è costante, e $\Delta \mathcal{Q}(x) = 2\mathrm{tr}Q$.

Diseguaglianza del valor medio. - Se una funzione $f : D \subseteq \mathbf{R}^M$, a valori in $\mathbf{R}^m$, nei punti di un segmento $S(p,q) \subseteq D$ di estremi p e q ha derivata nella direzione $v = q - p$ e allora:

$$|f(p) - f(q)|_m \le \sup_S \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_m$$

- Se f è differenziabile nei punti di S ($\|A\| = \sup \frac{|Av|}{|v|}$ norma di operatore di una matrice): $|f(p) - f(q)|_m \le |p - q|_M \sup_S \|\nabla f\| \le |p - q|_M \sup_S |\nabla f|_{\mathbf{R}^{Mm}}$.

Dimostrazione: - posto $u = f(q) - f(p)$: $|f(p) - f(q)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle$ si applica il Teorema di Lagrange alla funzione $g(t) = \langle (f(p + t(q - p))) \cdot u \rangle : [0; 1] \to \mathbf{R}$. Per ipotesi: $p+t(q-p) \in D$, $f(p+t(q-p))$ è derivabile per ogni $t \in [0; 1]$. Quindi g è combinazione lineare di funzioni derivabili. Posto $v = q - p$ è $g'(\tau)=\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(p + \tau v) \cdot u \right\rangle$. Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz $\langle \partial_v f \cdot u \rangle \le |\partial_v f|_m |u|_m$

$$|u|_m^2 = |f(p) - f(q)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle = g(1) - g(0) = g'(\tau) \le \sup_S \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_m |u|_m$$

Se f è differenziabile nei punti di S è $g'(\tau)=\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(p + \tau v) \cdot u \right\rangle = \langle (Jfv) \cdot u \rangle = \langle v \cdot \nabla f u \rangle \le$ (Cauchy-Schwarz) $\le |v|_M |\nabla f u|_M$ (def. norma di operatori FT 2)$\le |v|_M \, \|\nabla f\| \, |u|_m$. Quindi:
$|f(p) - f(q)|_m \le \sup_S \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_m \le |p - q| \sup_S \|\nabla f\|$ (cfr. lemma FT 2) $\le |p - q| \sup_S \sqrt{\sum_{j=1}^m |\nabla f_j|_M^2}$.

Analogamente in ipotesi di integrabilità si ha:
Diseguaglianza del valor medio integrale. - Se una funzione $f : D \subseteq \mathbf{R}^M$, a valori in $\mathbf{R}^m$, nei punti di un segmento $S = S(p, q) \subseteq D$ di estremi p e q ha derivata nella direzione $v = q - p$ *continua su* S, allora: $\qquad |f(p) - f(q)|_m \le \frac{1}{|p - q|_M} \int_S \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_m ds.$

- Se poi f è $C^1(D)$: $\qquad |f(p) - f(q)|_m \le \int_S \|\nabla f\| \, ds = |p - q|_M \int_0^1 \|\nabla f(p + t(q - p))\| \, dt.$

Dimostrazione: posto $v = q - p$, e $u = f(q) - f(p)$: $|f(q) - f(p)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle$, si considera $G(t) = f(p+t(q-p))$, che è derivabile con continuità con $G'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q - p))$. Integrando per componenti per la diseguaglianza triangolare per integrali vettoriali, FT 4:
$|f(q) - f(p)|_m^2 = |G(1) - G(0)|_m^2 = \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q - p)) \, dt \right|_m^2 \le \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q - p)) \right|_m dt \right)^2$

- Se f è C^1 si ha $G'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q - p)) = Jf(p + t(q - p))(q - p)$, e si conclude come nella precedente dimostrazione usando Cauchy-Schwarz.

Funzioni positivamente omogenee: - un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *cono di centro* c se per ogni $v \in C$, $v \ne c$ si ha $c + t(v - c) \in C$ per $t > 0$ (se contiene un punto contiene la semiretta aperta per c e il punto).
- Una funzione f si dice positivamente omogena di centro c e grado $\alpha \in \mathbf{R}$ se è definita su un cono di centro c e vale: $\qquad f(c + t(v - c)) = t^\alpha f(v)$ per ogni $v \in \mathrm{Dom} f \setminus \{c\}$

Teorema di Eulero: Sia f differenziabile in $\mathbf{R}^M \setminus \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$.

$$f \text{ è positivamente omogenea con centro } \vec{0} \text{ e grado } \alpha \in \mathbf{R} \ (\ f(tx) = t^\alpha f(x),\ x \ne \vec{0})$$
$$\text{se e solo se}$$
$$x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x),\ x \ne \vec{0}.$$

Dimostrazione: se $\alpha = 0$ da una parte la funzione è costante sulle semirette aperte dall'origine. Dall'altra ha derivata nella direzione della semiretta dall'origine nulla sulla stessa semiretta.
$\Downarrow$) $\alpha \ne 0$, dato $x \ne \vec{0}$ posto $\phi(t) = f(tx)$, $t > 0$, per la regola della catena per composizione con funzioni di una variabile FT 12, si ha $\phi'(t) = x \cdot \nabla f(tx)$.
Ma si ha anche $\phi(t) = t^\alpha f(x)$ per cui $\phi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Per $t = 1$ si ha l'eguaglianza.
$\Uparrow$) $\alpha \ne 0$, dato $x \ne \vec{0}$ sia $\psi(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}$. Si ha $\psi(1) = f(x)$. Ma per la regola della catena con cammini FT 12: $\psi'(t) = \frac{t^\alpha x \cdot \nabla f(tx) - \alpha t^{\alpha-1} f(tx)}{t^{2\alpha}} = \frac{t^\alpha x \cdot \nabla f(tx) - t^{\alpha-1} tx \cdot \nabla f(tx)}{t^{2\alpha}} = 0.$

Generazione di funzioni differenziabili
regola della catena

Generazione funzioni differenziabili 0: le funzioni di una variabile reale derivabili in p sono differenziabili in p: $D_pf(t) = tf'(p)$.

Generazione funzioni differenziabili 1: le funzioni costanti da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}^m$ sono differenziabili in ogni punto e il loro differenziale è la funzione lineare nulla.

Generazione funzioni differenziabili 2: Le funzioni lineari affini $x \mapsto Ax + b =: f(x)$ da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}^m$ con A lineare sono differenziabili in ogni punto p il loro differenziale è indipendente dal punto ed è la parte lineare della funzione stessa $v \mapsto Av$. In coordinate si avrà

$$(x_1 \dots x_k) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots a_{1k}x_k + b_1, \dots a_{m1}x_1 + \dots a_{mk}x_k + b_m) = Ax + b =: f(x)$$
$$D_pf(v) = {}^t(a_{11}v_1 + \dots a_{1k}v_k, \dots, a_{m1}v_1 + \dots a_{mk}v_k) = Av.$$

In effetti si ha $f(x) = f(p) + A(x - p)$ con resto nullo. Per funzioni a valori reali di due variabili affini $ax + by + c$ le derivate parziali sono rispettivamente le funzioni costanti a e b.

Generazione funzioni differenziabili 3: se $f,\ g$ sono funzioni di M variabili reali rispettvamente a valori in R^med $\mathbf{R}^n$ sono differenziabili in p lo è la funzione $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$. Ciè segue direttamente dalla definzione di differenzibilità (cfr. FT12).

Generazione funzioni differenziabili 4: Il prodotto di coordinate $f_{ij}(x) = x_ix_j,\ x \in \mathbf{R}^M$ è differenziabile in ogni punto p e si ha: $\nabla(x_ix_j)(p) = p_ie_j + p_je_i$. Conseguenza diretta del teorema del differenziale totale.

<u>Esercizio:</u> $\det : \mathcal{M}_{m\times m} \sim \mathbf{R}^{m^2} \to \mathbf{R}$ è differenziabile, cfr. paragrafo dedicato in FT. 12 .

Lemma 1. cfr. FT 2: $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}}$: $\qquad \|L\| =: \sup\limits_{v\neq\vec{0}} \dfrac{|Lv|_{\mathbf{R}^k}}{|v|_{\mathbf{R}^h}} \le |L|_{\mathbf{R^{hk}}}$.

$$|Lv|_{\mathbf{R}^k} = \left|\sum_{j=1}^{h} v_jL^j\right|_{\mathbf{R^k}} \le \sum_{j=1}^{h} |v_j| \left|L^j\right|_{\mathbf{R^k}} \le \text{ (Cauchy-Schwarz) } |v|_{\mathbf{R^h}}|L|_{\mathbf{R^{hk}}}.$$

Lemma 2. $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}}$: $\quad L[o_{\mathbf{R^h}}(r)] = o_{\mathbf{R^k}}(r)$, cioè se $\dfrac{|v|_{\mathbf{R^h}}}{r} \xrightarrow[x\to p]{} 0$ allora $\dfrac{|Lv|_{\mathbf{R^k}}}{r} \xrightarrow[x\to p]{} 0$

Generazione funzioni differenziabili 5. Regola della catena:
Dati $A = \overset{o}{A} \subseteq \mathbf{R}^M$, $B = \overset{o}{B} \subseteq \mathbf{R}^m$, $p \in A$, e due funzioni $A_{\ni x} \xrightarrow{f} B_{\ni f(x)=y} \xrightarrow{g} \mathbf{R}^N{}_{\ni g(y)=z}$ differenziabili rispettivamente in p e in $q = f(p)$. Allora $g\circ f$ è differenziabile in p e:

$$D_pg\circ f \;=\; D_{f(p)}gD_pf, \text{ come composizione di funzioni lineari, cioè}$$

$$J^xg\circ f\ (p) = J^yg\ (f(p))J^xf\ (p)\ ,\quad \nabla^xg\circ f\ (p) \;=\; \nabla^xf\ (p)\nabla^yg\ (f(p)) \text{ come prodotto di matrici,}$$

ovvero $\qquad \dfrac{\partial g_i\circ f}{\partial x_j}(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(p))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p), \qquad$ in breve $\qquad \dfrac{\partial z_i}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$

Dimostrazione.

$$g(f(x)) - g(f(p)) = D_qg[f(x) - f(p)] \;+\; o_N(|f(x) - f(p)|_m)$$

poichè $\quad f(x) - f(p) = D_pf[x - p] + o_m(|x - p|_M) \quad$ si ha $\quad g(f(x)) - g(f(p)) =$

$$= D_qgD_pf[x - p] \;+\; D_qg[o_m(|x - p|_M)] \;+\; o_N\left(|D_pf|_{Mm}\,|x - p|_M + |o_m(|x - p|_M)|_m\right),$$

quindi $g(f(x)) - g(f(p)) = D_qgD_pf[x - p] + o_N(|x - p|_M)$.

Essendo tutti gli errori relativi infinitesimi uniformemente nella direzione tale è l'errore relativo nella formula finale.

<u>Osservazione:</u> con queste regole di genarazione di funzioni differenziabili, in particolare la differenziabilità della composizione, e con il teorema del differenziale totale, partendo dalle funzioni derivabili di una variabile reale a valori reali, si ottengo e si riconoscono molte funzioni differenziabili e si calcolano i loro differenziali e i piani tangenti ai loro grafici.

Esempio, funzioni radiali: $f(x)=\phi(|x|_M)$, $x=(x_1,\dots,x_M)\in\mathbf{R}^M$, $r=|x|_M$, $\widehat{r}=\widehat{x}=\dfrac{x}{|x|_M}$.
Se $\phi:]0;+\infty[\to\mathbf{R}$ è derivabile allora f è differenziabile in $\mathbf{R}^M\setminus\{\vec{0}_{\mathbf{R}^M}\}$ e si ha per la regola della catena e per quanto calcolato nel primo paragrafo:

$$\nabla f(x)=\phi'(|x|_M)\frac{x}{|x|_M}=\phi'(r)\widehat{r}.$$

Se poi ϕ è derivabile due volte

$$Hf(x)=\phi''(|x|_M)\frac{x}{|x|_M}\otimes\frac{x}{|x|_M}+\phi'(|x|_M)\frac{|x|_M Id_{\mathbf{R}^M}-x\otimes\frac{x}{|x|_M}}{|x|_M^2}=$$

$$=\phi''(|x|_M^2)\left(\frac{x_ix_j}{|x|_M^2}\right)_{i,j}+\frac{\phi'(|x|_M)}{|x|_M^2}\left(\delta_{i,j}-\frac{x_ix_j}{|x|_M^2}\right)=\ \phi''(r)\widehat{r}\otimes\widehat{r}-\frac{\phi'(r)}{r}\left(Id_{\mathbf{R}^M}-\widehat{r}\otimes\widehat{r}\right)_{i,j}$$

per cui $$\Delta f(x)=\mathrm{tr}Hf(x)=\phi''(r)+\frac{M-1}{r}\phi'(r).$$

Generazione funzioni differenziabili 6. Differenziale dell'inversa:

Lemma 3. $L=\left(\,L_i^j\right)_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le k}}$ invertibile: $\qquad |L|_{\mathbf{R}^{\mathbf{k}^2}}\ge\|L\|\ \ge\ \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}\ \ge\ \dfrac{1}{|L^{-1}|_{\mathbf{R}^{\mathbf{k}^2}}}$.

$$\|L\|\|L^{-1}\|\ (\text{Proposizione FT 2})\ \ge\|LL^{-1}\|=\|Id_{\mathbf{R}^M}\|=1.$$

Corollario 1: $L=\left(\,L_i^j\right)_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le k}}$ invertibile: $\qquad |Lv|_{\mathbf{R}^\mathbf{k}}\ge\dfrac{|v|_{\mathbf{R}^\mathbf{k}}}{\|L^{-1}\|}$

Lemma 4: - se $f:A\subseteq\mathbf{R}^M\to B\subseteq\mathbf{R}^M$ è differenziabile in p con D_pf invertibile allora

$$|x-p|_M\left(\frac{1}{\|[Jf(p)]^{-1}\|}-\frac{o(|x-p|_M)}{|x-p|_M}\right)\le|f(x)-f(p)|_M\ ,\quad x\to p$$

Dimostrazione: - per differenziabilità $f(x)-f(p)=Jf(p)(x-p)+\vec{o}(|x-p|_M)$, per la diseguaglianza triangolare $|f(x)-f(p)|_M\ge|Jf(p)(x-p)|_M-|\vec{o}(|x-p|_M)|_M$, per il lemma 3 si conclude: $|f(x)-f(p)|_M\ge\dfrac{|x-p|_M}{\|[Jf(p)]^{-1}\|}-|\vec{o}(|x-p|_M)|_M$.

Teorema: siano $f:A\subseteq\mathbf{R}^M\to B\subseteq\mathbf{R}^M$ *bigettiva*, A e B aperti.
i - Se f è differenziabile in p ed f^{-1} lo è in $f(p)$, allora D_pf è invertibile e $D_{f(p)}(f^{-1})=(D_pf)^{-1}$, ovvero $Jf^{-1}(f(p))$ *è la matrice inversa di* $Jf(p)$.
ii - Viceversa se f è differenziabile in p con D_pf *invertibile*, e con $f^{-1}:B\to A$ *continua in* $q=f(p)$ allora f^{-1} è anche differenziabile in $f(p)$ e $D_{f(p)}f^{-1}=(D_pf)^{-1}$.
iii - Se inoltre f è $C^K(A)$, D_xf invertibile, $x\in A$, f^{-1} continua in B, allora anche f^{-1}è $C^K(B)$.
Osservazione: in **ii)** le ipotesi di esistenza e continuità dell'inversa non son necessarie. Sono conseguenza di un asserto più forte, il *teorema di invertibilità locale* cfr. FT 15.

Dimostrazione: **i -** Per la regola della catena $f^{-1}(f(x))=x\ \Rightarrow\ \left[D_{f(x)}f^{-1}\right][D_xf]=Id_{\mathbf{R}^M}$.

ii - $\dfrac{\left|f^{-1}(b)-f^{-1}(f(p))-(Jf(p))^{-1}(b-f(p))\right|}{|b-f(p)|}=$

$$\frac{\left|f^{-1}(b)-p-(Jf(p))^{-1}\left[Jf(p)(f^{-1}(b)-p)+o(|f^{-1}(b)-p|)\right]\right|}{|b-f(p)|}=\frac{\left|(Jf(p))^{-1}\left[o(|f^{-1}(b)-p|)\right]\right|}{|b-f(p)|}$$

$$=\left|(Jf(p))^{-1}\frac{o(|f^{-1}(b)-p|)}{|f^{-1}(b)-p|}\right|\cdot\frac{|f^{-1}(b)-p|}{|b-f(p)|}:$$

- - per continuità di f^{-1} in $f(p)$ se $b\to f(p)$, per il lemma 1, il primo fattore è infinitesimo.
- - sempre per continuità di f^{-1} in $f(p)$, grazie al lemma 4, si ha che il secondo fattore è limitato se $|b-f(p)|$ è abbastanza piccolo. Infatti riscrivendo la conclusione del lemma 4

in termini di b si ha: $|f^{-1}(b)-p|_M\left(\frac{1}{\|[Jf(p)]^{-1}\|}-\frac{o(|f^{-1}(b)-p|_M)}{|f^{-1}(b)-p|_M}\right)\leq|b-f(p)|_M$ per $f^{-1}(b)\to p$, e quindi, *per continuità di f^{-1} in $f(p)$, anche per $b\to f(p)$*,

pertanto vi è $\delta>0$ per cui se $|b-f(p)|\leq\delta$ si ha $\frac{|o(|f^{-1}(b)-p|_M)|}{|f^{-1}(b)-p|_M}\leq\frac{1}{2\|[Jf(p)]^{-1}\|}$, quindi

$$|f^{-1}(b)-p|_M\frac{1}{2\|[Jf(p)]^{-1}\|}\leq|b-f(p)|_M\ ,\ \text{ per } |b-f(p)|\leq\delta$$

$$\text{ovvero per } |b-f(p)|\leq\delta \text{ si ha } \frac{|f^{-1}(b)-p|_M}{|b-f(p)|_M}\leq 2\|[Jf(p)]^{-1}\|\ .$$

iii- Per il precedente punto f^{-1} è differenziabie in B, e $J(f^{-1})(b)=[(Jf)(f^{-1}(b))]^{-1}$.
- - S'identifichino le matrici $M\times M$ con $\mathbf{R}^{M^2}$. Essendo $A\mapsto\det A$ una funzione polinomiale nei coefficienti della matrice è continua su $\mathbf{R}^{M^2}$. Pertanto l'insieme delle matrici invertibili $\mathcal{I}$, definito da $\det A\neq 0$, è preimmagine di un aperto mediante una funzione continua, e quindi un insieme aperto per le matrici quadrate.
Essendo $A\mapsto A^{-1}$ una funzione, da $\mathcal{I}$ in sè, con componenti rapporti di polinomi (nei coefficienti di A) con denominatore ($\det A$) non nullo, è C^∞.
- - Pertanto $J(f^{-1})(b)=[(Jf)(f^{-1}(b))]^{-1}$ è composizione di funzioni continue e quindi è continua. Quindi f^{-1} è C^1.
- - Induttivamente, passando eventualmente alle derivate parziali successive, per la regola della catena si ha che f^{-1} è C^K se lo è f.

Cambi di coordinate non lineari

Diffeomorfismi: $f: A\subseteq\mathbf{R}^M\to B\subseteq\mathbf{R}^M$ bigettiva, differenziabile in A con inversa differenziabile in B (Jf invertibile), si dice *diffeomorfismo* tra A e B.

Corollario 2, cambiamenti di coordinate non lineari:
- sia $f: A_{\ni x}\subseteq\mathbf{R}^M\to B_{\ni y}\subseteq\mathbf{R}^M$ un diffeomorfismo che rappresenta un cambiamento di coordinate non lineare $y=f(x)$.
- Data $G: B\to\mathbf{R}$, $G=G(y)$, che esprime una grandezza nelle "vecchie" coordinate y, la $\widetilde{G}(x)=G(f(x)))$, $\widetilde{G}: A\to\mathbf{R}$ la esperime nelle "nuove" coordinate x.
- Sia $F: B\to\mathbf{R}$ differenziabile in $f(x)$ si ha $D_x\widetilde{F}=D_{f(x)}FD_xf$, ovvero considerando la fuzione Jacobiana e la funzione gradiente a valori matrici $J^x\widetilde{F}=\widetilde{J^yF}J^xf$, $\nabla^x\widetilde{F}=\nabla^xf\widetilde{\nabla^yF}$,

- ovvero con le derivate parziali $\displaystyle\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^M(\nabla^xf)_i^j\,\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}}=\sum_{j=1}^M\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}}=\sum_{j=1}^M\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}}$,

e reciprocamente (sempre in x) $\displaystyle\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}}=\sum_{i=1}^M\left((\nabla^xf)^{-1}\right)_j^i\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^M\frac{\widetilde{\partial f_i^{-1}}}{\partial y_j}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^M\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x_i}$.

NOTA: nella pratica, spesso (data esplicitamente $f(x)$, e quindi la matrice $\nabla f(x)$), non riuscendo ad esplicitare f^{-1}, per le relazioni reciproche tra le derivate conviene usare la prima uguaglianza, che coinvolge $(\nabla^xf)^{-1}$. Infatti si tratta di invertire la matrice nota $\nabla f(x)$.

- Sinteticamente (cfr. FT 7 derivata rispetto alla lunghezza d'arco), omettendo F, queste relazioni tra le derivate parziali di funzioni diventano relazioni tra "operatori di derivazione":

$$\frac{\partial\,\widetilde{}}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^M\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}};\qquad\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}=\sum_{i=1}^M\left((\nabla^xf)^{-1}\right)_j^i\frac{\partial\,\widetilde{}}{\partial x_i},\ \text{ cioè }\ \widetilde{\nabla^y}=(\nabla^xf)^{-1}\,\nabla^x\widetilde{}\,.$$

Alcuni esempi notevoli sono le coordinate polari in $\mathbf{R}^2$, cilindriche e sferiche in $\mathbf{R}^3$.

Esempio,coordinate polari: - come calcolato nel primo paragrafo
$f(r,\phi)=(r\cos\phi, r\sin\phi):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ è differenziabile, $J_{(r,\phi)}f=\begin{pmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}$.
- Restringendosi a $(0;+\infty)\times[0;2\pi)$ si ottiene un *diffeomorfismo* tra la striscia aperta e $\mathbf{R}^2\setminus\{(x,0): x\geq 0\}$: $\begin{cases}x(r,\phi)=r\cos\phi\\ y(r,\phi)=r\sin\phi\end{cases}$, che dà un cambiamento di coordinate. Le linee coordinate $r=$ costante: sono le circonferenze centrate nell'origine, e le linee coordinate $\phi=$ costante: sono le semirette di vertice l'origine. In particolare $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e nel primo quadrante $\phi=\operatorname{artan}\frac{y}{x}$: ivi $f^{-1}(x,y)=(r(x,y),\phi(x,y))=(\sqrt{x^2+y^2},\operatorname{artan}\frac{y}{x})$, differendo $\phi(x,y)$ negli altri quadranti per una costante.
- Si adotta la notazione $\widehat{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$, $\widehat{\phi}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ (posizione). Come vettori applicati in (x,y) la coppia $(\widehat{r},\widehat{\phi})$ è un sistema di riferimento "locale" ortonomale, orientato come la base canonica $\det\left(\widehat{r}\mid\widehat{\phi}\right)=1>0$.
- Come visto $\widehat{r}=\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\phi=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\partial r}{\partial x}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\phi=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\partial r}{\partial y}\end{cases}$ e $r\widehat{\phi}=\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial\phi}= & -r\sin\phi=-y & =r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}= & r\cos\phi=x & =r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{cases}$, ovvero $Jf=\begin{pmatrix}\partial_r x & \partial_\phi x\\ \partial_r y & \partial_\phi y\end{pmatrix}=\left(\widehat{r}\mid r\widehat{\phi}\right)$.
- Osservando che le colonne di Jf sono ortogonali è immediato calcolare l'inversa che avrà come righe gli opportuni multipli delle colonne di Jf:
$(Jf)^{-1}=\begin{pmatrix}{}^t\widehat{r}\\ \dfrac{{}^t\widehat{\phi}}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r}\end{pmatrix}=J\widetilde{(f^{-1})}=\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x r} & \widetilde{\partial_y r}\\ \widetilde{\partial_x\phi} & \widetilde{\partial_y\phi}\end{pmatrix}$ confermando che
$J\left(f^{-1}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$.
- Pertanto le relazioni tra gli operatori di derivazione nelle diverse coordinate sono:
diretto $\begin{cases}\partial_r{}^\sim= & \cos\phi\,\widetilde{\partial_x}+\sin\phi\,\widetilde{\partial y}\\ \partial_\phi{}^\sim= & -r\sin\phi\,\widetilde{\partial_x}+r\cos\phi\,\widetilde{\partial y}\end{cases}$ ovvero $(\nabla^{r\phi}f)\widetilde{\nabla^{xy}}=\nabla^{r\phi\sim}$, cioè
$\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -r\sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x}\\ \widetilde{\partial_y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_r{}^\sim\\ \partial_\phi{}^\sim\end{pmatrix}$, nella pratica di solito conviene sostituire a x e y, nella funzone $F(x,y)$ da derivare, le loro espressioni in coordinate polari e derivare direttamente rispetto a queste;
inverso $\begin{cases}\widetilde{\partial_x}= & \cos\phi\,\partial_r{}^\sim-\dfrac{\sin\phi}{r}\,\partial_\phi{}^\sim\\ \widetilde{\partial_y}= & \sin\phi\,\partial_r{}^\sim+\dfrac{\cos\phi}{r}\,\partial_\phi{}^\sim\end{cases}$ ovvero $(\nabla^{r\phi}f)^{-1}\nabla^{r\phi\sim}=\widetilde{\nabla^{xy}}$, cioè
$\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r{}^\sim\\ \partial_\phi{}^\sim\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x}\\ \widetilde{\partial_y}\end{pmatrix}$, che invece, nei casi pratici, può esser comoda da usare, data $\Psi(r,\phi)$, per trovare le sue derivate in x in y, piuttosto che sostituire a r e ϕ le loro espressioni in x e y e derivarle che è più oneroso.

- Quest'ultima relazione contiene anche la decomposizione del gradiente di $F(x,y)$ rispetto al sistema di coordinate locali:

$$\widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{r}}}\widehat{r} + \widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{\phi}}}\widehat{\phi} = \widetilde{\nabla^{xy} F} = (\nabla^{r\phi} f)^{-1}\nabla^{r\phi}\widetilde{F} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\dfrac{\sin\phi}{r} \\ \sin\phi & \dfrac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \nabla^{r\phi}\widetilde{F} = \left(\widehat{r} \,\middle|\, \frac{\widehat{\phi}}{r} \right) \nabla^{r\phi}\widetilde{F} =$$

$$= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\widehat{\phi}.$$

- Iterando la relazione $\begin{cases} \widetilde{\partial}_x = & \cos\phi\,\partial_r{}^{\sim} - \dfrac{\sin\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \\ \widetilde{\partial}_y = & \sin\phi\,\partial_r{}^{\sim} + \dfrac{\cos\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \end{cases}$ si ottiene l'espressione in coordinate polari del Laplaciano:

$$\widetilde{\Delta^{xy}} = \widetilde{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \widetilde{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}^{\sim} + \frac{1}{r}^2\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}^{\sim} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}^{\sim}.$$

si procede come segue

$$\widetilde{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\widetilde{\frac{\partial F}{\partial x}} = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi}\right) =$$

$$= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\phi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi}\right) - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi}\right) =$$

$$= \cos^2\phi\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi} - \frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r\partial\phi} -$$

$$\left(-\frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\phi\partial r} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi} - \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\phi^2}\right) = \ldots$$

$$= \cos^2\phi\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\phi^2}, \quad \text{analogamente:}$$

$$\widetilde{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} = \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\phi}\right) = \ldots$$

$$\cdots = \sin^2\phi\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\phi}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\phi^2}.$$

Esempio,coordinate cilindriche: si tratta delle coordinate polari sui piani orizzontali, $z =$costante. La terza coordinata rimane quella cartesiana: $f : (0;+\infty)\times(0;2\pi)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$, $f(r,\phi,z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $\begin{cases} x(r,\phi,z) = r\cos\phi \\ y(r,\phi,z) = r\sin\phi \\ z(r,\phi,z) = z \end{cases}$, che è un diffeomorfismo con $\mathbf{R}^3\setminus\{(x,0,z) : x\geq 0\}$.

$$J_{(r,\phi,z)}f = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio,coordinate sferiche: - si considerano le coordinate sferiche " geografiche": $f : (0;+\infty)\times(-\pi;\pi)\times(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}^3$, $f(r,\phi,\theta) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$

$\begin{cases} x(r,\phi,\theta) = r\cos\theta\cos\phi \\ y(r,\phi,\theta) = r\cos\theta\sin\phi \\ z(r,\phi,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$. È un diffeomorfismo con $\mathbf{R}^3\setminus\{(x,0,z) : x\leq 0\}$.

- Si adottano le notazioni seguenti: $p=(x,y,z)$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=r\cos\theta$;

$\widehat{p}=\widehat{r}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{pmatrix}$, versore direzione dall'origine normale alla sfera unitaria in $\widehat{p}$; $\widehat{\rho}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}$; $\widehat{\phi}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 0\end{pmatrix}$,

versore latitudine "orizzontale" tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza del "parallelo" in $\widehat{p}$;

$\widehat{\theta}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\phi\\ -\sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$, versore longitudine tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza massima del "meridiano" in $\widehat{p}$. Si ha inoltre $\widehat{\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix}-\dfrac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sqrt{x^2+y^2}\end{pmatrix}$.

- Come vettori applicati in $\widehat{p}$ i versori mutuamente ortogonali nell'ordine $(\widehat{r},\widehat{\phi},\widehat{\theta})$ individuano una base ortonormale locale, orientata come la base canonica di $\mathbf{R}^3$: $\det(\widehat{r}\mid\widehat{\phi}\mid\widehat{\theta})=1>0$.

- Si ha $J_{(r,\phi,\theta)}f=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{pmatrix}=\left(\widehat{r}\mid r\widehat{\phi}\cos\theta\mid r\widehat{\theta}\right)$ con colonne ortogonali, pertanto è agevole calcolare l'inversa per righe: $\left(J_{(r,\phi,\theta)}f\right)^{-1}=\begin{pmatrix}{}^t\widehat{r}\\ \dfrac{1}{r\cos\theta}\,{}^t\widehat{\phi}\\ \dfrac{1}{r}\,{}^t\widehat{\theta}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\phi}{r\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{r\cos\theta} & 0\\ -\dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r} & -\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}=J\,\widetilde{(f^{-1})}=\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x r} & \widetilde{\partial_y r} & \widetilde{\partial_z r}\\ \widetilde{\partial_x\phi} & \widetilde{\partial_y\phi} & \widetilde{\partial_z\phi}\\ \widetilde{\partial_x\theta} & \widetilde{\partial_y\theta} & \widetilde{\partial_z\theta}\end{pmatrix},\quad\text{per cui:}$$

diretto $\begin{cases}\dfrac{\partial\sim}{\partial r}= \cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x}+\cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y}+\sin\theta\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\sim}{\partial\phi}= -r\cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x}+r\cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\sim}{\partial\theta}= -r\sin\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x}-r\sin\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y}+r\cos\theta\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z}\end{cases}$ ovvero $(\nabla^{r\phi\theta}f)\widetilde{\nabla^{xyz}}=\nabla^{r\phi\theta}\sim$,

$$\frac{\partial}{\partial r}=\langle\widehat{r}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle=\frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{r}}\quad,\quad\frac{\partial}{\partial\phi}=r\cos\theta\langle\widehat{\phi}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle=r\cos\theta\frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{\phi}}\quad,\quad\frac{\partial}{\partial\theta}=r\langle\widehat{\theta}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle=r\frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{\theta}}\quad;$$

inverso: $\begin{pmatrix} \widetilde{\partial}_x \\ \widetilde{\partial}_y \\ \widetilde{\partial}_z \end{pmatrix} = \widetilde{\nabla^{xyz}} = (\nabla^{r\phi\theta} f)^{-1} \nabla^{r\phi\theta\sim} = \left(\widehat{r} \;\middle|\; \frac{1}{r\cos\theta}\widehat{\phi} \;\middle|\; \frac{1}{r}\widehat{\theta}\right) \begin{pmatrix} \partial_r{}^\sim \\ \partial_\phi{}^\sim \\ \partial_\theta{}^\sim \end{pmatrix} =$

$$= \widehat{r}\,\frac{\partial^\sim}{\partial r} + \frac{\widehat{\phi}}{r\cos\theta}\,\frac{\partial^\sim}{\partial\phi} + \frac{\widehat{\theta}}{r}\,\frac{\partial^\sim}{\partial\theta},\ \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x} = \cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial r} - \dfrac{\sin\phi}{r\cos\theta}\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial\phi} - \dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r}\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial\theta} \\[3ex] \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y} = \cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial r} + \dfrac{\cos\phi}{r\cos\theta}\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial\phi} - \dfrac{\sin\theta\sin\phi}{r}\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial\theta} \\[3ex] \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z} = \sin\theta\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial^\sim}{\partial\theta} \end{cases}$$

- Quest'ultima relazione contiene anche la decomposizione del gradiente di $F(x,y,z)$ rispetto al sistema di coordinate locali:
$\widetilde{\dfrac{\partial F}{\partial \widehat{r}}}\,\widehat{r} + \widetilde{\dfrac{\partial F}{\partial \widehat{\phi}}}\,\widehat{\phi} + \widetilde{\dfrac{\partial F}{\partial \widehat{\theta}}}\,\widehat{\theta} = \widetilde{\nabla^{xyz}F} = \dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}\,\widehat{r} + \dfrac{1}{r\cos\theta}\,\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial\phi}\,\widehat{\phi} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial\theta}\,\widehat{\theta}$, e quindi riottenendo

$$\frac{\partial^\sim}{\partial r} = \frac{\widetilde{\partial}}{\partial \widehat{r}}\,, \quad \frac{\partial^\sim}{\partial\phi} = \widetilde{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\,, \quad \frac{\partial^\sim}{\partial\theta} = \widetilde{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\,.$$

- Valgono inoltre $\begin{cases} \dfrac{\partial\widehat{r}}{\partial r} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial\widehat{r}}{\partial\phi} = \cos\theta\,\widehat{\phi}\,, & \dfrac{\partial\widehat{r}}{\partial\theta} = \widehat{\theta} \\[3ex] \dfrac{\partial\widehat{\phi}}{\partial r} = \dfrac{\partial\widehat{\phi}}{\partial\theta} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial\widehat{\phi}}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\widehat{\rho}, & \\[3ex] \dfrac{\partial\widehat{\theta}}{\partial r} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\phi} = -\sin\theta\,\widehat{\phi}\,, & \dfrac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\theta} = -\widehat{r} \end{cases}$

Esercizio. *(Coordinate sferiche "geografiche" in $\mathbf{R}^N$)* Per $N \geq 2$ sia
$\mathbf{G} : [0,\infty[\, \times [-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^{N-2} \to \mathbf{R}^N$: $\mathbf{G}(\rho,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-1}) = \mathbf{x}$ definita induttivamente

da $\begin{cases} \mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{r}}_N = \rho(\cos\vartheta_{N-1}\hat{\mathbf{r}}_{N-1}, \sin\vartheta_{N-1}) \\[2ex] \hat{\mathbf{r}}_2 = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1) \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} x_N = \rho\sin\vartheta_{N-1} \\ x_{N-1} = \rho\cos\vartheta_{N-1}\sin\vartheta_{N-2} \\ x_{N-3} = \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\sin\vartheta_{N-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3 = \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\cos\vartheta_{N-1}\ldots\ldots\cos\vartheta_3\sin\vartheta_2 \\ x_2 = \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\sin\vartheta_1 \\ x_1 = \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\cos\vartheta_1 \end{cases}$

i- Si mostri che $\mathbf{G}$ è surgettiva su $\mathbf{R}^N$.

ii- Si mostri che$\mathbf{G}$ è iniettiva da $[0,\infty[\,\times(-\pi,\pi]\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{N-2}$ (ovvero dato $\mathbf{x}$ si ha che ϑ_h è individuato univocamente se $\vartheta_{h+1},\ldots\vartheta_{N-1} \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$), e se ne determini l'immagine.

iii- Si provi che le derivate parziali di $\mathbf{G}$ sono tra loro ortogonali.

iv- Si calcoli la matrice Jacobiana di $\mathbf{G}$ verificando che

$$\det J\mathbf{G}(\rho,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-2},\vartheta_{N-1}) = \rho^{N-1}(\cos\vartheta_{N-1}1)^{N-2}(\cos\vartheta_{N-2})^{N-3}\cdot\ldots\cdot(\cos\vartheta_3)^2\cdot(\cos\vartheta_2).$$

Differenziabilità di integrali dipendenti da parametri

Si tratta il caso integrali in una variabile, assolutamente convergenti in senso generalizzato alla Riemann. Per gli enunciati che riguardano il caso di integrali in più variabili, e nel senso di Lebesgue: cfr. FT 21. Si riportano gli enunciati dei risultati dimostrati in FT 9 utili.

Continuità degli integrali dipendenti da parametri e domini variabili: viic)

- sia $\phi : A\times Y\to\mathbf{R}$, $(Y,\widetilde{d})$ spazio metrico. Se

1) vi è g per cui $|\phi(x,y))|\le g(x)$, $y\neq q$, $x\notin N$, con N di misura nulla, e $g(x)\in\mathcal{RL}^1(A)$,

2) $x\mapsto f_y(x) =: \phi(x,y)$, possono esser integrate, per ogni y,

3) $y\mapsto\phi(x,y)$ sono continue in y_0 per $x\notin N$,

$$\text{allora } \mathcal{I}_\phi(y) = \int_A \phi(x,y)dx \text{ è continua in } y_0.$$

- Se inoltre le $y\mapsto\phi(x,y)$ sono *continue su* Y per $x\notin N$, allora $\widetilde{\mathcal{I}}_\phi(s,t,y) = \int_s^t \phi(x,y)dx$ è continua su $A\times A\times Y$.

- Se poi $a : Y\to A$ e $b : Y\to A$ sono funzioni continue allora

$$\mathcal{F}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx \text{ è continua.}$$

Derivabilità degli integrali dipendenti da parametri 2: viid)

sia $\phi : A\times D\to\mathbf{R}$, $D\subseteq\mathbf{R}$ intervallo. Se

0) $x\mapsto\phi(x,y)$ sono assolutamente integrabili su A, per ogni $y\in D$,

1) $y\mapsto\phi(x,y)$ sono derivabili su D per $x\notin N$, $N\subseteq A$ di misura nulla,

2) - vi è g per cui $\sup_{y\in D}\left|\dfrac{d\phi}{dy}(x,y)\right|\le g(x)$, $x\notin N$, e $\int g(x)dx<+\infty$,

3) - le $x\mapsto\dfrac{d\phi}{dy}(x,y)$, comunque estese fuori da N, possano essere integrate su A,

$$\text{allora } \mathcal{I}_\phi(y) = \int_A \phi(x,y)dx \text{ è derivabile su } D, \text{ e } \frac{d}{dy}\left(\int_A \phi(x,y)dx\right) = \int_{A\setminus N}\frac{d\phi}{dy}(x,y)dx.$$

Usando tale criterio ora si dimostra

Corollario, scambio: sia $\phi=\phi(x,y) : A\times D\to\mathbf{R}$, $D\subseteq\mathbf{R}^m$, aperto, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, se:

0) $x\to\phi(x,y)$ sono $\mathcal{RL}^1(A)$ per ogni y, 1) $y\mapsto\phi(x,y)$ sono $C^1(D)$ per $x\notin N$, $\text{mis}(N)=0$,

2) dato q per qualche $r>0$ $\sup_{|y-q|_{\mathbf{R}^M}\le r}\left|\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}(x,y))\right|\le g(x)$, $g\in\mathcal{RL}^1(A)$, $x\notin N$,

3) le $x\mapsto\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}(x,y)$, $1\le i\le m$, comunque estese fuori da N, possano essere integrate su A,

allora $y\mapsto\mathcal{I}(y) = \int_A\phi(x,y)dx$ è $C^1(D)$, e $\dfrac{\partial}{\partial y_i}\int_A\phi(x,y)dx = \int_{A\setminus N}\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}(x,y)dx.$

Dimostrazione: - per il criterio di continuità degli integrali parametrici viic), essendo per $x\notin N$, N di misura nulla, le $\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}(x,y)$, definite, assolutamente integrabili e dominate in x, e continue in y, si avrebbe la continuità di $\int_{A\setminus N}\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}(x,y)dx$ in D. Lo spazio metrico $(Y,\widetilde{d})$ è nel caso D con la distanza euclidea di $\mathbf{R}^m$

- Basta dimostrare che esistono $\dfrac{\partial \mathcal{I}}{\partial y_i}(y)$ uguali a $\displaystyle\int_{A\setminus N} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)dx$.

- Si fissi $q \in D$, vi sono $r > 0$ e g assolutamente integrabile in x per cui $\overline{B}(q,r) \subseteq D$, $\displaystyle\sup_{|y-q|_{\mathbf{R}^M} \le r} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)) \right| \le g(x)$ per $x \notin N$, $1 \le i \le m$.

- Si fissi $1 \le i \le m$. Ci si riduce al caso $m = 1$ considerando le funzioni $\psi(x,t) = \phi(x, q+te_i)$, $t \in [-r;r]$. Le funzioni ψ verificano le ipotesi del criterio di derivabillità degli integrali parametrici viid) in $A \times [-r;r]$ con $[-r;r]$ al posto di D. Pertanto, esiste

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\int_A \phi(x,y)dx\right)_{y=q} = \frac{d}{dt}\left(\int_A \psi(x,t)dx\right)_{t=0} = \int_{A\setminus N} \frac{d\psi}{dt}(x,0)dx = \int_{A\setminus N} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,q)dx.$$

Corollario: se A ha misura finita, ϕ è assolutamente integrabili in x, con derivate parziali, in $y_1, \ldots, y_m$, continue separatamente in y ed x, limitate su $(A \setminus N) \times K$, K compatto, N nullo, vale la formula di scambio tra integrale e derivate.

Oltre alle ipotesi del corollario, ripetute per comodità, se l'integranda è continua nel complesso delle variabili di derivazione e di integrazione, e il dominio di integrazione varia in modo C^1 rispetto alle variabili di derivazione, si dimostra il desiderato asserto:

Teorema, derivata per integrali su domini variabili: siano $\phi = \phi(x,y) : A \times D \to \mathbf{R}$, $a = a(y) : D \to A$, $b = b(y) : D \to A$, $A \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, $D \subseteq \mathbf{R}^m$, aperto. Se

0) $x \to \phi(x,y)$ sono assolutamente integrabili su A per ogni y,

1) $y \mapsto \phi(x,y)$ sono $C^1(D)$ per $x \notin N$, di misura nulla,

2) dato q per qualche $r > 0$ $\displaystyle\sup_{|y-q|_{\mathbf{R}^M} \le r} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)) \right| \le g(x)$, $g \in \mathcal{RL}^1(A)$, $x \notin N$,

3) le $x \mapsto \dfrac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)$, $1 \le i \le m$, comunque estese fuori da N, possano essere integrate su A,

4) le funzioni $a : D \to A$, $b : D \to A$ sono $C^1(D)$,

$$\text{allora } y \mapsto \mathcal{F}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx \quad \text{è} \quad C^1(D), \text{ e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx\right) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)dx + \frac{\partial b}{\partial y_i}(y) \cdot \phi(b(y),y) - \frac{\partial a}{\partial y_i}(y) \cdot \phi(a(y),y).$$

(comunque estese le derivate a tutti gli $x \in A$ fuori da N.)

Dimostrazione: - poichè $\displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx = \int_0^{b(y)} \phi(x,y)dx - \int_0^{a(y)} \phi(x,y)dx$, ci si riduce ad avere un solo estremo di integrazione variabile: $\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_0^{b(y)} \phi(x,y)dx = \widetilde{\mathcal{I}}(0, b(y), y) =: \hat{\mathcal{I}}(b(y), y)$.

- È una composizione di funzioni: essendo $y \mapsto (b(y), y) =: \beta(y) : D \to A \times D$ (la funzione grafico di b su D) una funzione differenziabile $C^1(D)$, se si mostra che $\hat{\mathcal{I}} : A \times D \to \mathbf{R}$ è differenziabile $C^1(A \times D)$, allora la funzione composta $\mathcal{F}$ sarebbe differenziabile $C^1(D)$.

- - Fissato $y \in D$, per l'ipotesi di continuità in x delle $\phi(x,y)$, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, $\hat{\mathcal{I}}(\tau, y) = \displaystyle\int_0^\tau \phi(x,y)dx$ è derivabile rispetto a τ con derivata $\phi(x,y)$ continua per ipotesi nel complesso delle variabili.

- - Fissato $\tau \in A$, da 0), 1), 2), 3), per il precedente corollario esiste $\dfrac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial y_i}(\tau, y)$ uguale a $\displaystyle\int_0^\tau \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)dx$. Per continuità delle $y \mapsto \dfrac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)$, e "dominatezza" delle $x \mapsto \dfrac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)$, per viic), tale derivata $\displaystyle\int_0^\tau \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)dx$ è continua nel complesso delle variabili (τ, y).

- - Per il teorema del differenziale totale $\mathcal{I}$ è differenziabile e $C^1(A \times D)$.

- Per la regola della catena, posto $z = (z_1, \dots, z_{m+1}) = (\tau, y_1, \dots, y_m) \sim (\tau, y)$, quindi

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial \beta_j}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial z_j}(\beta(y)) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \beta_h}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial y_h}(\beta(y)) + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial \tau}(\beta(y)) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial y_h}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial y_h}(b(y), y) + \frac{\partial b}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial \tau}(b(y), y) = \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial y_i}(b(y), y) + \frac{\partial b}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}}{\partial \tau}(b(y), y) =$$

$$= \int_0^{b(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x, y) dx + \frac{\partial b}{\partial y_i}(y) \cdot \phi(b(y), y).$$

Corollario: se A è un segmento chiuso e limitato, ϕ è continua in (x, y), con derivate parziali, in $y_1, \dots, y_m$, continue separatamente in y ed x, limitate su $(A \setminus N) \times K$, K compatto, N nullo, vale la formula del teorema.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.