Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 14
SOTTOVARIETÀ E SUPERFICIE PARAMETRICHE.

Sottovarietà

Avendo dato una nozione precisa di tangenza solo per i grafici di funzioni differenziabili si considera questa nozione per sottoinsiemi che in un intorno di un loro punto sono grafici.
I teoremi del Dini (funzioni implicite) e il teorema del rango permetteranno di usare questa nozione rispettivamente per luoghi di zeri e immagini di restrizioni di funzioni vettoriali.
Punti M-regolari interni: - denotando le variabili coordinate $(x_1, \dots x_N) \in \mathbf{R}^N$, dati $0 < M < N$, $E \subseteq \mathbf{R}^N$ un $q \in E$ si dice *M-regolare C^K interno* per E, si scriverà $q \in iE$, se:
- vi è un intorno W *aperto* in $\mathbf{R}^N$ di q per cui $W \cap E$ individua
- il *grafico* di una funzione $f = (f_{j_1}, \dots, f_{j_{N-M}}) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{N-M}}) \in \left(C^K(A)\right)^{N-M}$, delle rimanenti M coordinate $x_{i_1}, \dots, x_{i_M}$ *su un aperto* $A \subseteq \mathbf{R}^M$.
<u>Osservazione:</u> precisamente $\{j_1, \dots, j_{N-M}\}$ e $\{i_1, \dots, i_M\}$ sono una partizione di $\{1, \dots, N\}$, e la loro scelta dipende da q e da W.
Quindi se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ è la base canonica di $\mathbf{R}^N$, si intende che per $(x_{i_1}, \dots, x_{i_M}) \in A$ si identifica la funzione grafico di f, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_M}) \mapsto ((x_{i_1}, \dots, x_{i_M}), f(x_{i_1}, \dots, x_{i_M}))$, con $\Psi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) =: \sum_{1 \le h \le M} x_{i_h}\mathbf{e}_{i_h} + \sum_{1 \le k \le N-M} f_{j_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_M})\mathbf{e}_{j_k}$, e questi sono tutti e soli gli elementi di $W \cap E$. In questo senso si ha $q \sim (p, f(p))$ per qualche $p \in A$.
Coordinate, parametrizzazioni e carte locali: - La coppia (A, Ψ) si dice *parametrizzazioneo carte* locale in q di E. La coppia $(W \cap E, \Psi^{-1})$ *coordinate locali* in q di E.
<u>Osservazione:</u> se q è regolare interno per E tutti i punti di $E \cap W_q$ lo sono.
<u>Osservazione:</u> - volendo estendere al caso $M = N$, un punto q è N-regolare interno per $E \subseteq \mathbf{R}^N$ se q è *interno* ad E. La funzione f sarebbe la funzione *vuota senza alcuna componente.*
- Volendo estendere al caso $M = 0$, non sarebbe altro che un punto *isolato* in E.
<u>Osservazione:</u> per $M = 1$, per il teorema del rango "baby", la nozione data viene a coincidere con quella di punto 1-regolare per un $E \subseteq \mathbf{R}^N$ in FT.6, apparentemente più generale: E "localmente vicino " a q è sostegno di una cammino regolare con inversa continua.
Sottovarietà senza bordo: Un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^N$ si dice *M-sottovarietà C^K regolare* di $\mathbf{R}^N$ se ogni suo punto è M-regolare C^K.

La nozione di M-sottovarietà con bordo di $\mathbf{R}^N$ considera "pezzi" che comprendono i loro "confini" in cui si possa definire una direzione di uscita. Prima si precisa la nozione in $\mathbf{R}^M$.
Punti e parti di frontiera regolari: $A \subseteq \mathbf{R}^M$ aperto, $p \in \partial A$ è C^K regolare per A se:
- vi è un *cilindro* $U \sim B \times I$ *aperto* in $\mathbf{R}^M$, $p \in U$, per cui $U \cap \partial A$ e $U \cap A$ siano rispettivamente
- - il *grafico*, e *l'intersezione* di U con *il sottografico o il sopragrafico* aperto, di una ψ funzione reale di $M-1$ tra le coordinate $y_1, \dots, y_M$ di $\mathbf{R}^M$,
- - definita su un *palla aperta* B di tale $\mathbf{R}^{M-1} \hookrightarrow \mathbf{R}^M$, $\psi \in C^K(B)$.
- - $T \subseteq \partial A$ per cui ogni suo punto è regolare per A (localmente determina l'esterno di A), si dirà *parte di frontiera (aperta) regolare per A*.
Insiemi qualsiasi: $C \subseteq \mathbf{R}^M$, $p \in \partial C$ è regolare di frontiera per C se:
- vi sono una *palla aperta* U in $\mathbf{R}^M$, $p \in U$, un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^M$ per cui
- - $U \cap \partial C = U \cap \partial A$ e $U \cap C = U \cap \overline{A}$ o $U \cap C = U \cap A$;   - - $U \cap \partial A$ è regolare per A.
<u>Osservazione:</u> - tale nozione permette di riconoscere le direzioni che, vicino a p, escono da C.
- Per $M = 2$ è semplice estendere la defnzione a quella di C^k **a tratti** richiedendo che il grafico sia di una funzione *continua* e C^k a tratti (segmenti aperti), cfr. FT6.
Aperti regolari: un aperto A di $\mathbf{R}^M$ si dice regolare C^K (ovvero sottovarietà M-dimensionale con *bordo* C^K di $\mathbf{R}^M$) se ogni suo punto di frontiera è C^k regolare.

- La condizione è più impegnativa di questa conseguenza, in quanto richiede che dalla frontiera si possa "uscire" dall'aperto: per esempio $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$ è un aperto di $\mathbf{R}^2$, la sua frontiera, la retta $\{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$, è regolare. Ma per ogni intorno U di un punto $(x, 0)$ della frontiera di A, $U \cap \overline{A} = U \cap \mathbf{R}^2 = U$ non è intersezione tra se stesso e il sottografico di alcuna funzione ψ per cui $(x, 0) = (s, \psi(s))$ o $(x, 0) = (\psi(t), t)$.

Punti di $(M-1)$-bordo: un punto $q \in E \subseteq \mathbf{R}^N$ si dice *di $(M-1)$-bordo C^k*, $q \in bE$, se:
- vi è un intorno W *aperto* in $\mathbf{R}^N$ di q per cui $W \cap E$ coincide con
- il *grafico* su $A \cup T$ di $f \in \left(C^K(U')\right)^{N-M}$, di M variabili tra le coordinate $x_1, \ldots, x_N$ di $\mathbf{R}^N$, a valori nell' $\mathbf{R}^{N-M} \subseteq \mathbf{R}^N$ ortogonale individuato dalle rimanenti coordinate,
- definita su U' aperto, A aperto, $A \cup T \subseteq U'$ e T parte di frontiera C^K-regolare per A.
- Infine $q \in \mathrm{Graf}_T\, f$.

Osservazione: - per un tale q tutti i punti di $E \cap W$ o sono regolari interni per E (quelli in $\mathrm{Graf}_A f$), o sono regolari di bordo per E (quelli in $\mathrm{Graf}_T f$).
- Le nozioni di parametrizzazioni o carte locali e di coordinate locali sono eguali.

Piano tangente. Sia q regolare, almeno C^1, interno o di bordo per E. Il *tangente a E in q* è il piano affine M-dimensionale, tangente in q al grafico individuato, nell'intorno di q, da E. Per comodità spesso, quando non sorga confusione, si indicheranno con T_qE sia tale piano affine che la sua giacitura.

Vettori tangenti esterni nei punti di bordo. Sia $q \in bE$.
- Un vettore $\mathbf{H}$ tangente a E in q si dice *esterno* se, detta $\mathbf{H}^\perp$ la sua componente ortogonale al $(M-1)$-piano tangente a bE, si ha:
• $\mathbf{H}^\perp \neq 0$, e per ogni curva regolare $\gamma : [0; \varepsilon[\to E$ tale che $\gamma(0) = q$ si ha $\langle \gamma'(0) \cdot \mathbf{H}^\perp \rangle_N \leq 0$.
- La • è equivalente a: $\forall \varphi :\ \varphi(0) = q,\ \varphi'(0) = \mathbf{H}$ vi è δ per cui se $0 < t < \delta$ allora $\gamma(t) \notin E$. Usando questa si estende la definizione quando q sia punto di bordo *regolare a tratti*, $M = 2$.
- Un vettore $\mathbf{J}$ *non nullo* tangente a E in $q \in bE$ si dirà *normale esterno* se è normale al tangente a bE ed esterno.

Sottovarietà con bordo: un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^n$ si dice *sottovarietà M-dimensionale C^K con bordo* di $\mathbf{R}^N$ se ogni suo punto è M-regolare interno C^K o è $(M-1)$-regolare di bordo C^K. Nel caso bE si dirà bordo della varietà, e iE suo interno.

Osservazione: - per definzione il bordo di una varietà M dimensionale con bordo, è una varietà $(M-1)$ dimensionale (... senza bordo).
-L'unione E tra il semipiano aperto $\{(x, y) : y < 0\}$ e la semiretta aperta $\{(x, 0) : x < 0\}$ è una varietà con bordo. Mentre l'unione F tra $\{(x, y) : y < 0\}$ con la semiretta chiusa $\{(x, 0) : x \leq 0\}$ *non è* una varietà con bordo per via del punto $(0, 0)$: sarebbe il bordo di bE.

Osservazione: per $M = 2$ è semplice estendere la definzione e precisare quando q sia *punto di bordo C^K a tratti* : $q \sim (s, \psi(s), f(s, \psi(s))$ con ψ continua C^k a tratti (aperti). Con ciò si da la definizione di 2-varietà con *bordo C^K a tratti.*

Varietà complete e chiuse

- Una *M-sottovarietà*, con o senza bordo, di $\mathbf{R}^N$ si dice *completa* se è un chiuso di $\mathbf{R}^N$.
- Si dirà *chiusa* se completa e *senza bordo.*

Avvertenza: in alcune trattazioni si chiamano sottvarietà chiuse quelle che sono chiuse, e qui definite complete. Quelle qui definite chiuse allora si diranno chiuse senza bordo.

Osservazione: - a livello intuitivo, la definzione di varietà completa senza bordo corrisponde a dire che "aggiungendo pezzi" $M-1$ dimensionali non si ottiene una varietà con bordo.
- Le frontiere di aperti di $\mathbf{R}^N$ regolari (localmente sottografici) sono $(N-1)$-varietà chiuse.
- In questa nozione rientrano la sfera $N-1$ dimensionale in R^N , il toro sostegno di $(R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r\cos\vartheta(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + r\sin\vartheta(0, 0, 1))$, etc. .
- I sostegni di curve chiuse regolari o sostegni di curve regolari semplici definite su tutta la retta e con inversa continua sono 1-varietà chiuse.

Differenziale e gradiente tangenziale

Similmente a quanto visto per i piani tangenti ai grafici, se $q \in E \subseteq \mathbf{R}^N$ è un punto M-regolare C^K per E, $K \geq 1$, di $\mathbf{R}^N$, il piano tangente M dimensionale ad E in $q \in E$ ha giacitura che è lo spazio vettoriale di tutte le velocità (cfr. FT 13)

$$\Gamma'(0) \text{ di cammini } \Gamma : I \to E \text{ per cui } \Gamma(0) = q.$$

Gradiente tangenziale 2. - Se $q \in E \subseteq \mathbf{R}^M$ è un punto k-regolare per E, una funzione $f : E \to \mathbf{R}^m$ si dice *differenziabile lungo E in q* se

- - esiste un intorno U in $\mathbf{R}^M$ di q ed esiste una funzione $g : U \to \mathbf{R}^m$, per cui:

- - - $g_{|_E} = f_{|_U}$, - - - g è differenziabile in q.

- Nel caso, denotando con T_qE la *giacitura* del piano tangente ad E in q, si definiscono *il differenziale e il gradiente (ambiente) di f lungo E in q:*

$$D_q^E f = D_q^{T_qE} g = D_q g P^{T_qE} \quad , \quad \nabla^E f(q) = \nabla^{T_qE} g(q) = P^{T_qE} \nabla g(q).$$

<u>Osservazione:</u> Tale definizione *non dipende dall'estensione* g di f ad un intorno in $\mathbf{R}^M$ di q. Se h è un'altra estensione differenziabile di f ad U, per ogni cammino regolare $\Gamma : I \to E$ con $\Gamma(0) = q$, si ha che: $h(\Gamma(t)) = f(\Gamma(t)) = g(\Gamma(t))$ per ogni $\in I$, e derivando per $t = 0$:

$$\langle \Gamma'(0) \cdot \nabla h(q) \rangle = \langle \Gamma'(0) \cdot \nabla g(q) \rangle .$$

Ma $\Gamma'(0) \in T_q(E)$ è arbitrario: $\nabla h(q)$ e $\nabla g(q)$ hanno uguale proiezione ortogonale su T_qE.

- Nel caso in cui la sottovarietà E sia un *luogo di zeri* di funzioni con differenziale di rango massimo, si ha che una base dell'*ortogonale* al luogo di zeri è data dai gradienti in p delle funzioni componenti (significato geometrico del gradiente sul dominio FT 13).

- Nel caso in cui una k-sottovarietà E sia *immagine* di una funzione regolare $\Psi : C \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^M$ con $J\Psi(x)$ sempre di rango massimo, una base di T_qE è dato dalle derivate parziali di Ψ in q (le velocità delle immagini degli assi coordinati FT 13).

Superficie parametrica

La nozione di superficie M dimensionale parametrica, opportunamente organizzata, permetterebbe di trattare in modo analitico situazioni difficilmente comprensibili a livello sintetico. Qui si precisa la terminologia di base, in analogia con il caso $M = 1$, cioè quello di cammini.

Superficie parametrica: $D \subseteq \mathbf{R}^M$, connesso per archi (cfr. FT 5), $\overline{D^o} = \overline{D}$ ($\partial D = \partial(D^o)$): una $\Psi : D \to \mathbf{R}^m$, $m > M$, continua si dice *superficie parametrica*, in breve *superficie*.

Superficie semplice: si dice semplice una Ψ per cui i punti di D^o sono di iniettività su D.

Superficie regolare: una superficie Ψ è *regolare* di dimensione M se:

$$\Psi \in C^1(D^o) \text{ e } D_p\Psi \text{ ha rango massimo, } p \in D^o.$$

Superficie regolare in senso forte: si dice *regolare in senso forte* se inoltre:

- $D = \overline{D}$ ed è limitato, quindi compatto; - $\Psi \in C^1(\overline{D})$ e $D_p\Psi$ ha rango massimo, $p \in \overline{D}$;

- Ψ è semplice, e

- - nei punti $p,\ q \in \partial D$ per cui $\Psi(p) = \Psi(q)$ si ha $\mathrm{Im} D_p\Psi = \mathrm{Im} D_q\Psi$,

cioè le M immagini, mediante Ψ, delle linee coordinate di $\mathbf{R}^M$ per p e per q, hanno le M velocità, $\dfrac{\partial \Psi}{\partial s_1}(p), \ldots, \dfrac{\partial \Psi}{\partial s_M}(p)$ e $\dfrac{\partial \Psi}{\partial s_1}(q), \ldots, \dfrac{\partial \Psi}{\partial s_M}(q)$ che generano lo stesso sottospazio di $\mathbf{R}^N$.

Si anticipa una nozione, cfr. FT 16, legata a quella di punti di bordo regolari

Carta locale o superficie con bordo: Ψ superficie si dice *regolare con bordo regolare* o *carta locale* se: - $D = A \cup T$, A aperto, T parte di frontiera regolare per A,

- $\Psi \in C^1(D)$, - Ψ è iniettiva su D con *inversa continua*; - $D_p\Psi$ ha rango massimo per $p \in D$;

La restrizione di Ψ a T si dirà bordo di Ψ: $b\Psi$.

<u>Osservazione:</u> - una superficie parametrica regolare di dimensione M può aver e immagine (*supporto*) che non è una varietà.

- Già nel caso unidimensionale di cammini regolari in senso debole, cfr. FT 4 e 6, il sostegno può non essere una varietà. Nel caso di cammini, se $D = [a;b]$ è chiuso e limitato, e il

Osservazione: - nel caso di dimensione M maggiore di 1, le veci della C^1 regolarità sono fatte dall'avere *differenziale continuo di rango massimo*, le veci del segmento limitato e chiuso dall'assumere che D *sia compatto*, e le veci della periodicità del versore tangente *dall'eguaglianza dell'immagine del differenziale* in punti di frontiera in cui si perda l'iniettività.
Osservazione: - si noti che nel caso di una superficie Ψ iniettiva e regolare in senso forte, essendo D compatto, anche $\Psi^{-1} : \mathrm{Im}\Psi \to D$ è *continua*: è un omeomorfismo (cfr, FT 5).
- Precisamnete, grazie al teorema del rango, cfr FT 15, 16, si ottiene che l'immagine su $\overset{o}{D}$ di una superficie regolare in senso forte, iniettiva, su un compatto $D = \overline{\overset{o}{D}}$, di dimensione M, è localmente un grafico di una funzione di M variabili differenziabile e quindi una *varietà*.
- Quindi le restrizioni di una superficie regolare semplice a sottoinsiemi di D, aperti in $\mathbf{R}^M$ limitati e con distanza positiva da ∂D hanno supporto che è una varietà. Infatti la chiusura di tali aperti è compatta contenuta in $\overset{o}{D}$, ove il differenziale ha rango massimo.
- Analogamente il sostegno di superficie *semplice* con bordo regolare è varietà con bordo.
Osservazione: - invece non è detto che, se il sostegno di una superficie regolare in senso forte è una varietà con bordo, la superficie sia con bordo regolare. Per esempio il nastro di Moebius (per coerenza con le definzioni privato dei punti $(0,2,1)$, $(0,2,-1)$) sostegno di $\left((2-v\sin\frac{u}{2})\sin u, (2-v\sin\frac{u}{2})\cos u, v\cos\frac{u}{2}\right)$: $0 \le u < 2\pi$, $-1 \le v \le 1$ ma $(u,v) \ne (0,\pm 1)$, $A = (0;2\pi)\times(-1;1)$, $T = \{0\}\times(-1;1)\cup(0;2\pi)\times\{1\}\cup(0;2\pi)\times\{-1\}$: nell'immagine di T i trasformati dei punti $(0,v)$ sono interni al sostegno. Anzi sembrerebbe proprio che il nastro *non possa essere* sostegno di *alcuna superficie con bordo regolare.*
- Il cilindro, per coerenza con le definzioni privato dei punti $(1,0,\pm 1)$, sostengo di $\Psi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, $0 \le u < 2\pi$, $-1 \le v \le 1$, vertici $(0,\pm 1)$ esclusi, A e T come sopra, è una '2-varietà con bordo' ma Ψ *non* è una '2-superficie con bordo': infatti il lato verticale del rettangolo $\{0\}\times(-1;1)$ viene trasformato in un segmento di punti interni al sostegno. Ma esso può essere parametrizzato da una corona circolare (senza due punti sulla frontiera $(1,0)$, $(\sqrt{3},0)$): ovvero è anche sostegno di $\Phi(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}-2)$, $1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$, A corona circolare aperta di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 3, T unione delle circonferenze che la delimitano private dei punti $(1,0)$ e $(\sqrt{3},0)$.
Osservazione: - il bordo di una superficie M dimensionale non è, con le nozioni data, a sua volta una superficie $(M-1)$-dimensionale: si può però vedere come "somma" di superfici $(M-1)$-dimensionali. Il suo sostegno sarà unione dei sostegni di queste.
Piano tangente. - Data una superficie Ψ in $\mathbf{R}^m$ definita su D, regolare in senso forte, o con bordo regolare, si dice piano tangente in $\Psi(p)$, $p \in D$, un piano M dimensionale in $\mathbf{R}^m$ dato in forma parametrica da (cfr. FT 13)

$$\Psi(p) + s_1\frac{\partial\Psi}{\partial t_1}(p) + \cdots + s_M\frac{\partial\Psi}{\partial t_M}(p) \text{ al variare di } s \in \mathbf{R}^M,$$

ovvero il piano affine M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$, passante per $\Psi(p)$ con giacitura $\mathrm{Im}D_p\Psi$.

Versori normali: se Ψ è una superficie regolare bidimensionale in $\mathbf{R}^3$ si dicono versori normali in $\Psi(p)$ i vettori unitari $\quad \pm\dfrac{\frac{\partial\Psi}{\partial s}(p)\times\frac{\partial\Psi}{\partial t}(p)}{|\frac{\partial\Psi}{\partial s}(p)\times\frac{\partial\Psi}{\partial t}(p)|_{\mathbf{R}^3}}$.

Vettori tangenti esterni: se $q = \Psi(p)$ è un punto di bordo di una superifice Ψ, un vettore tangente $H \in \mathrm{Im}D_p\Psi$, si dice *vettore tangente esterno alla superficie* se, per qualche K vettore tangente esterno in p al dominio di Ψ, si ha $H = D_p\Psi(K)$.

Avvertenza: - Senza definizione rigorosa si parlerà di superfici *regolari tratti* o varietà C^k *a tratti*, ottenute *giustapponendo opportunamente lungo i bordi* superfici regolari con bordo, o varietà con bordo. Analogamente si parlerà di superfici, varietà con *bordo regolare a tratti.*
- Per $M = 2$ e Ψ iniettiva su D chiuso, è semplice estendere la definizione per precisare quando $\Psi(p)$ è *punto di bordo C^1 a tratti*: p sia di frontiera C^1 a tratti per $\overset{o}{D}$ e il rango di $D_p\Psi$ sia 2. Così, per $M = 2$ si dà la nozione di superficie con *bordo C^1 a tratti.*

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] superfici bidimensionali pagg. 243-252, teorema del Dini e di invertibilita' locale pagg.265-287;

[B] superfici bidimensionali pagg. 256-258, 287-289, 532-535 teorema del Dini per due variabili pagg. 307-310, per tre variabili pagg. 324-330, per sistemi ed invertibilita' locale pagg. 365-369, 376, 378, 379,

[F] superfici bidimensionali pagg. 545-565, 577-579, teoremi del Dini e di invertibilita' locale pagg. 591-620, sottovarieta' e loro piani tangenti pagg. 641-656.