Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 16
FORMULAZIONI EQUIVALENTI PER VARIETÀ,
Presentazione di sottovarietà

Sottovarietà. Grazie ai teoremi di invertibilità locale, del rango e delle funzioni implicite si ha direttamente che q è un punto M-regolare C^K per $E \subseteq \mathbf{R}^N$ se e solo se vi sono

1) un intorno W di q aperto in $\mathbf{R}^N$, un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^M$,
e una $\Psi : A \to E \cap W \subseteq \mathbf{R}^N$ bigettiva, continua, con *inversa continua*,
che sia $C^K(A)$ con diffeerenziale di rango massimo,

• brevemente E (restringendosi a una palla chiusa contenuta in A) è *localmente il sostegno di una superficie parametrica (regolare in senso forte);*

2) un intorno W di q aperto in $\mathbf{R}^N$,
ed una $F : W \to \mathbf{R}^{N-M}$, per cui $W \cap E = \{x \in W : F(x) = \vec{\mathbf{0}}\}$
$C^K(W)$ con differenziale di rango massimo su $W \cap E$,

• in breve E è *localmente luogo di zeri regolare di una funzione* nel senso del teorema del Dini.

Sottovarietà con bordo. Per sottovarietà con bordo gli analoghi hanno dimostrazione meno diretta. Il punto di partenza è la seguente conseguenza del teorema di invertibilità locale:

Proposizione. - Se $A \subseteq \mathbf{R}^M$ è un *aperto*, $\Omega \supseteq \overline{A}$ è aperto in $\mathbf{R}^M$ e $\Lambda : \Omega \to \mathbf{R}^M$ è iniettiva, $C^K(\Omega)$, $K \geq 1$, con *differenziale* in ogni punto *invertibile* , allora
l' inversa di Λ è continua e C^K,
$\mathrm{Im}_A\Lambda$, l'immagine di Λ su A è un *aperto di* $\mathbf{R}^M$,
la cui *frontiera* $\partial\mathrm{Im}_A\Lambda$ è eguale all'*immagine* della frontiera di A, $\mathrm{Im}_{\partial A}\Lambda$.

- Se poi p è un punto di frontiera C^K, $K \geq 1$, regolare per A, tale è allora $\Lambda(p)$ per $\mathrm{Im}_A\Lambda$.

<u>Osservazione:</u> vale un teorema più profondo, la cui dimostrazione esorbita le tecniche e i contenuti da esporre: il *Teorema di Invarianza del Dominio la cui versione euclidea è*:
se A è aperto di $\mathbf{R}^M$, $\Lambda : A \to \mathbf{R}^m$, $M \geq m$, è *continua*,ed *iniettiva* allora
$m = M$, e *trasforma aperti* di A (e quindi di $\mathbf{R}^M$) in *aperti di* $\mathbf{R}^M$:
equivalentemente l'*immagine di* Λ *su* A *è aperta in* $\mathbf{R}^M$ e l'*inversa* Λ^{-1} *di* Λ *è continua.*

Ne segue: q è un punto di $(M-1)$-*bordo* C^K-*regolare* per $E \subseteq \mathbf{R}^N$
se e solo se vi sono

1b) W intorno di q aperto in $\mathbf{R}^N$, A aperto di $\mathbf{R}^M$, T parte aperta di frontiera regolare per A,
$\Psi : A \cup T \to E \cap W$ bigettiva, continua, con *inversa continua*, con $q \in \Psi(T)$,
che sia $C^K(A \cup T)$ con differenziale di rango massimo.

• Brevemente E è *localmente un "pezzo" di una superficie regolare parametrica con bordo.*

- I punti di $\Psi(A)$ sono i punti regolari di $E \cap W$, quelli di $\Psi(T)$ regolari di bordo.

2b) W intorno di q aperto in $\mathbf{R}^N$,
$F : W \to \mathbf{R}^{N-M}$, $G : W \to \mathbf{R}$, funzioni $C^K(W)$ per cui
$W \cap E = \{x \in W : F(x) = \vec{\mathbf{0}},\ G(x) \leq 0\}$, e $F(q) = \vec{\mathbf{0}}$, $G(q) = 0$
(F, G) con differenziale di rango massimo su $\{x \in W : F(\mathbf{x}) = \vec{0},\ G(x) = 0\}$, (*trasversalità*)
F con differenziale di rango massimo su $W \cap E$,

• brevemente E è *localmente un "pezzo", delimitato da una* $(M-1)$-*varietà trasversale , di un luogo di zeri di una funzione regolare* nel senso del teorema del Dini.

-I punti di $\{F = \vec{0},\ G < 0\}$ sono i punti regolari di $E \cap W$, e i punti di $\{F = \vec{0},\ G = 0\}$ sono i suoi punti di bordo regolari.

<u>Osservazione:</u> - l'equivalenza 2b) nel caso di punti di frontiera regolari di aperti si specializza:
- se $A \subseteq \mathbf{R}^M$ è un aperto,

$$\begin{gathered} p \in \partial A \text{ è } C^K \text{ regolare,} \\ \text{se e solo se vi sono} \\ \text{un intorno } U \text{ aperto in } \mathbf{R}^M \text{ di } p, \\ \text{una funzione } G : U \to \mathbf{R},\ C^K(U) \text{ per cui } U \cap \overline{A} = \{x \in U : G(x) \leq 0\}, \\ U \cap \partial A = \{x \in U : G(x) = 0\},\ \nabla G(p) \neq 0_{\mathbf{R}^M},\ G(p) = 0. \end{gathered}$$

Carte e coordinate locali, atlanti. - In 1) ed 1b) le coppie (A, Ψ), $(A \cup T, \Psi)$ ($D\Psi$ di rango massimo) sono dette *carte locali* o *parametrizzazioni locali*, e Ψ^{-1} *coordinate locali* , di E in q.
- Un insieme di carte locali $\{(A^1 \cup T^1, \Psi^1), \ldots, (A^i \cup T^i, \Psi^i), \ldots\}$ per cui
$\Psi^1(A^1 \cup T^1) \cup \cdots \cup \Psi^i(A^i \cup T^i) \cup \cdots = E$ si dice *atlante* per la sottovarietà E.

Sulla base dell'equivalenze mostrate, a secondo della presentazione della varietà, le varie nozioni inerenti a tale definzione si specializzano e cartterizzano. Nel caso di presentazione parametrica tali nozioni vengono a coincidere con queli dati per superfice parametrica, con l'accortezza, per queste ultime, di passare eventualmente a restrizioni.

Piani tangenti e ortogonali: l'equivalenza è stata dettagliatamente illustrata in FT 13 nei paragrafi riguardanti l'interpretazione geometrica del gradiente e la tangenza ad immagini. Adottando le notazioni di 1), 2b), 2), 2b), i *vettori tangenti H ad E in q*, per esso regolare, sono quindi così caratterizzati:

1t) $$H = J\Psi(q)\gamma'(0),\ \gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \to A \cup T,\ \Psi(\gamma(0)) = q,$$

2t) $$D_q F H = \vec{0}_{\mathbf{R}^{N-M}}.$$

Vettori, in punti di bordo, tangenti esterni: - riferendosi alle notazioni della precedente osservazione per prima cosa si ha:

- Un vettore non nullo $K \in \mathbf{R}^M$ in $p \in \partial A$ regolare per $A \subseteq \mathbf{R}^M$ aperto,
$(U \cap \overline{A} = \{G \leq 0\},\ G(p) = 0,\ \nabla G(p) \neq \vec{0})$, è *esterno ad A in p* se e solo se
$$\langle K \cdot \nabla G(p) \rangle > 0.$$

- Quindi valgono le seguenti caratterizzazioni di vettori tangenti esterni in q che sia $(M-1)$-regolare di bordo C^K per $E \subseteq \mathbf{R}^N$ ($q \in bE$):

- - se $(A \cup T, \Psi)$ è una carta locale di E in $q = \Psi(p)$, $p \in T \subseteq \partial A$ di frontiera regolare per A

un vettore H tangente in q ad E è *esterno* se e solo se

1e) per qualche $K \in \mathbf{R}^M$ non nullo *esterno* in p ad $A \cup T$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial K}(p) = J\Psi(p)K = H.$$

- - se $W \cap E = \{F = \vec{0}\} \cap \{G \leq 0\}$, $F(q) = \vec{0}$, $G(q) = 0$,
$D(F, G)$ di rango massimo su $\{F = \vec{0}\} \cap \{G = 0\}$, DF di rango massimo su $W \cap E$

un vettore H tangente in q ad E è *esterno* se e solo se

2e) $$\langle H \cdot \nabla^E G(q) \rangle_N > 0.$$

Dimostrazione 2e): - per trasversalità, la proiezione ortogonale di $\nabla G(q) {\neq} 0_{\mathbf{R}^N}$ su T_qE, giacitura del tangente in q ad E, $\nabla^E G(q) {\neq} \vec{0}$ altrimenti: $\nabla G(q) {\in} (T_qE)^\perp$ generato dai $\nabla F_j(p)$.
- $\nabla^E G(q) \perp T_q bE$, infatti: $\nabla G = (\nabla^E G + \nabla^{(T_qE)^\perp} G) \perp T_q bE$ e $\nabla^E G(p) \perp T_q bE \subseteq T_qE$, .
- Inoltre è *esterno* poichè $G \leq 0$ su E: per $\gamma(t) \in E$, $t \geq 0$, $\gamma(0) = q$ si ha
$0 \geq G(\gamma(t)) = t\langle \gamma'(0) \cdot \nabla^E G(p) \rangle_N + o(t)$, dividendo per $t > 0$, per $t \to 0^+$ si ottiene $0 \geq \langle \gamma'(0) \cdot \nabla^E G(p) \rangle_N$.
- Se $H \in T_qE$ è un vettore del tangente (di dimensione M) ad E in q, la componente di H ortogonale a $T_q bE$, tangente (di dimensione $M-1$) in q a bE, deve essere un multiplo di $\nabla G^E(p)$: $\nabla^E G(q) \in T_qE$, $\nabla^E G(q) \perp T_q bE$. Sarà esterno $(0 \geq \langle \gamma'(0) \cdot H^\perp \rangle)$ se e solo se è un multiplo strettamente positivo di $\nabla^E G(q)$.

Dimostrazione della proposizione: i - i primi tre punti seguono direttamente dalle definizioni di aperto, frontiera e dal teorema di invertibilità locale. In particolare: trasforma aperti di Ω (quindi di $\mathbf{R}^M$) in aperti di $\mathbf{R}^M$, quindi $\Lambda(\Omega)$ e $\Lambda(A)$ sono aperti, per cui l'inversa di Λ è continua. Inoltre per ipotesi Λ è bigettiva, per cui dal fatto che A e $\Lambda(A)$ sono aperti, segue che le decomposizioni $\Omega = A \cup (\Omega \cap \partial\ A) \cup (\Omega \setminus A)^o$ e $\Lambda(\Omega) = \Lambda(A) \cup ((\partial(\Lambda(A))) \cap \Lambda(\Omega)) \cup (\Lambda(\Omega) \setminus \Lambda(A))^o)$ sono unioni disgiunte. Quindi $\Lambda(\Omega \cap \partial\ A) = (\Lambda(\partial(A))) \cap \Lambda(\Omega)$ è disgiunto dagli aperti $\Lambda(A)$ e $\Lambda((\Omega \setminus A)^o)$. Per per cui $(\Lambda(\partial(A))) \cap \Lambda(\Omega) \subseteq (\partial(\Lambda(A))) \cap \Lambda(\Omega)$. Con lo stesso ragionamento usando Λ^{-1} si ottiene l'inclusione opposta. Quindi la frontiera (raletiava ad Ω) di A viene tarsformata nella frontiera (relativa a $\Lambda(\Omega)$) di $\Lambda(A)$.

ii - Va mostrato che vi ùn cilindro aperto di centro $q =: \Lambda(p)$ per cui $(\partial\Lambda(A)) \cap V$ e $\Lambda(A) \cap V$ sono rispettivamente l'intersezione di V con il grafico e il sottografico (o sopragrafico) di una funzione di $M-1$ variabili tra le coordiante di $\mathbf{R}^M$.
- - Per ipotesi vi è un cilindro aperto in $\mathbf{R}^M$, $U = D \times I \subseteq \Omega$, di centro p per cui $(\partial A) \cap U$ coincida con il grafico cartesiano di una ϕ funzione C^1 di $M-1$ variabili, tra le coordinate di $\mathbf{R}^M$, definta su una palla $M-1$-dimensionale D, e $A \cap U$ è l'intersezione con U del corrispondente sottografico. Si può anche assumere che ϕ sia funzione delle prime $M-1$ coordinate identificando $\mathbf{R}^M$ con $\mathbf{R}^{M-1} \times \mathbf{R}$, per cui si assume che D sia centrata in a con centrata in a, $p = (a, \phi(a))$. Infatti si tratterebbe di considerare la composizione di Λ, avente la stessa immagine, con una funzione lineare bigettiva, che dà il cambiamanto di coordinate che porta nelle prime $M-1$ quelle del dominio di ϕ.
- - Per quanto scritto $\Lambda(U)$ è aperto, $\Lambda((\partial A) \cap U) = (\partial\Lambda(A)) \cap \Lambda(U)$, $\Lambda(A \cap U) = \Lambda(A) \cap \Lambda(U)$. Per ipotesi $(\partial A) \cap U = \mathrm{Graf}_D\phi = \mathrm{Im}_D(y, \phi(y))$, detta $G : D \to U$ la funzione grafico $G(y) = (y, \phi(y)))$, si ha $(\partial\Lambda(A)) \cap \Lambda(U) = \mathrm{Im}_D\Lambda(y, \phi(y)) = \mathrm{Im}_D\Lambda(G(y))$.
- - La funzione $\Lambda_o G$ ha jacobiano $J\Lambda JG$ di rango massimo $M-1$: infatti $J\Lambda$ è invertibile per ipotesi, e $JG = \begin{pmatrix} Id_{(M-1)\times(M-1)} \\ J\phi \end{pmatrix}$ ha rango $M-1$. Più precisamente come minore invertibile si considera quella dato dalle prime $M-1$ componenti di Λ. Posto $J = J\Lambda$, $j = J\phi$, $H = J(\Lambda_o G)$, si ha infatti (cfr. FT 11):

$$H = (J^1|\ldots|J^M) \begin{pmatrix} Id_{(M-1)\times(M-1)} \\ j^1 \ldots j^{M-1} \end{pmatrix} = (J^1|\ldots|J^M) \left(\begin{array}{c|c|c} e_1^{\mathbf{R}^{M-1}} & \ldots & e_{M-1}^{\mathbf{R}^{M-1}} \\ \hline j^1 & \ldots & j^{M-1} \end{array}\right) =$$

$$= (J^1 + J^M j_1|\ldots|J^{M-1} + J^M j_{M-1}) \ , \quad \det H_{\not{M}} = \det J_{\not{M}} \neq 0, \text{ in quanto } \det J \neq 0.$$

Per il secondo teorema del rango, identificando $\mathbf{R}^M$ con $\mathbf{R}^{M-1} \times \mathbf{R}$, restringedosi per ottenere cilindri: vi sono un cilindro $V = V \times J \subseteq \Lambda(U)$ aperto in $\mathbf{R}^M$ di centro q per cui $(\partial\Lambda(A)) \cap V = \mathrm{Im}_D\Lambda_o G \cap V$ è il grafico di una ψ funzione C^K delle prime $M-1$ variabili definita su una palla aperta $M-1$ dimensionale T di centro b, con $q = (b, \psi(b))$: $(\partial\Lambda(A)) \cap V = \mathrm{Graf}_T\psi$.
- - Va mostrato infine che $\Lambda(A) \cup V$ è l'intersezione tra V e il sopragrafico o il sottografico di ψ su T. Si considerano le partizioni di V: $V = (\mathrm{Graf}_T{}^{>}\phi \cap V) \cup (\partial\Lambda(A)) \cap V) \cup (\mathrm{Graf}_T{}^{<}\phi \cap V)$,
$V = (\Lambda(A) \cap \Lambda(U) \cap V) \cup (\partial\Lambda(A)) \cap V) \cup ((\Lambda(U) \setminus \Lambda(A))^o \cap V) =$
$\quad = (\Lambda(A) \cap V) \cup (\partial\Lambda(A)) \cap V) \cup (B \setminus \Lambda(A))^o$.
Si usano i seguenti fatti generali e di diretta dimostrazione: una funzione continua trasforma connessi (per archi) in connessi (per archi), il grafico di una funzione continua su un connesso (per archi) è connesso per (archi), è chiuso relativo nel prodotto cartesiano tra dominio e codiminio, il sopragrafico e il sottografico di una funzione continua su una palla intersecati un cilindro, con tale palla come base, aperto e contenente il grafico sono connessi (per archi).
Poichè $A \cap U$, intersezione tra sottografico e cilindro aperto che contiene il grafico , l'immagine omeomorfa $E =: \Lambda(U) \cap \Lambda(U)$ è connessa aperta. Analogamente $F =: (\Lambda(U) \setminus \Lambda(A))^o$ è connesso. Anche $G =: \mathrm{Graf}_T{}^{>}\phi \cap B$ è aperto connesso e contenuto nell'unione disgiunta $E \cup F$: direttamente dalla defnzione di connesso si ha che se un connesso aperto G se contenuto nell'unone disgiunta di due connessi aperti $E \cup F$ allora è contenuto in uno dei due. Quindi $\mathrm{Graf}_T{}^{>}\phi \cap B \subseteq \Lambda(U) \cap \Lambda(U) \cap B$ o $\mathrm{Graf}_T{}^{>}\phi \cap B \subseteq (\Lambda(U) \setminus \Lambda(A))^o$. Analogo per $\mathrm{Graf}_T{}^{<}\phi \cap B$. Quindi $\mathrm{Graf}_T{}^{>}\phi \cap V$ e $\mathrm{Graf}_T{}^{<}\phi \cap V$ coindicono ognuno con uno tra $(V \setminus \Lambda(A))^o$ o $V \cap \Lambda(U)$.

Esercizio. L'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito dalle condzioni $f(x,y,z) = 2x^2 - z = 0, \;\; g(z,y,z) = x2 - z = 0$, è una variatà con bordo?

Esercizio. La superficie parametrica $(\cos u, \sin u, v)$, $0 \le u \le 2\pi, \;\; -1 \le v \le 1$ è regolare in senso forte? È una superficie parametrica regolare con bordo? Il suo sostegno è una varietà con bordo?

Esercizio. (Nastro di Moebius) Data la superficie parametrica $((2-v\sin\frac{u}{2})\sin u, (2-v\sin\frac{u}{2})\cos u, v\cos\frac{u}{2})$, $0 \le u \le 2\pi, \;\; -1 \le v \le 1$: scrivere le sue coordinate nel sistema di riferimento $\hat{\mathbf{c}}(u) = (\sin u, \cos u, 0), \hat{\mathbf{d}}(u) = (\cos u, -\sin u, 0), \hat{\mathbf{e}}_3 = (0,0,1)$. È regolare in senso forte? È una superficie parametrica regolare con bordo? Il suo sostegno è una varietà con bordo? Mostrare che sul suo sostegno $\mathcal{M}$ non si può definire nessuna funzione continua a valori nella sfera unitaria..

Esercizio. Quante carte ci vogliono per avere un atlante della sfera con carte locali che siano "funzioni grafico"?

Esercizio. Mostrare che il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ definito da: $x^2 + y^2 = 1, \;\; x^2 + z^2 = 1, \;\; 1 < z^2 + w^2 \le 4, \;\; y > 0$, è una varietà con bordo. Determinarne il bordo, ed impostare il calcolo per trovare il versore tangente, normale al bordo, esterno.

Complemento: un tentativo di definizione della regolarità a tratti.

Domini normali, o semplici cfr. FT 21 - un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^2$ si dice *dominio C^r normale rispetto al primo asse coordinato*, o anche *C^r semplice rispetto alla rimanente coordinata* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni continue su un segmento chiuso e C^r al suo interno:

$$D = \{(x,y):\; f(x) \le y \le g(x), \;\; a \le x \le b\}, \; f \le g \;;$$

Osservazione: in $\mathbf{R}$ i domini semplici sono i segmenti chiusi e limitati.

- induttivamente un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^M$ si dice *dominio C^r normale rispetto ad un $N-1$ piano coordinato P*, o anche *C^r semplice rispetto alla rimanente coordinata* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni continue definite su un dominio C^r normale, del piano coordinato P, e C^r al suo interno:

- se $r = 0$ ovvero le funzioni sono solo continue si dirà dominio normale.

e.g. $M = 5$, $(x,y,z,u,v) \in D$, v-semplice

$$\left\{ (x,y,z,u,v): \;\; \begin{cases} f(x,y,z,u) \le v \le g(x,y,z,u), \\ \phi(x,y,u) \;\; \le z \le \psi(x,y,u), \\ F(x,y) \;\;\; \le u \le G(x,y), \;\; \Phi(y) \;\;\; \le x \le \Gamma(y), \;\; a \le y \le b \end{cases} \right\}$$

$f \le g$, $\phi \le \gamma$, $F \le G$, $\Phi \le \Gamma$. I domini normali sono compatti: chiusi e limitati.

Osservazione: il cono pieno $z^2 = x^2 = y^2$, $0 \le z \le 1$ è un dominio normale C^∞.

Domini C^r a pezzi: un sottoinsieme $C \subseteq \mathbf{R}^M$ è C^r *a pezzi* se è di unione finita di domini C^r normali, i *pezzi*, con parti interne a due a due disgiunte.

Punti di frontiera regolari: (cfr. FT 6bis) dato $C \subseteq \mathbf{R}^M$ un $q \in \partial C$ si dice *regolare* se localmente in q si ha che C e ∂C sono rispettivamente il sottografico e il grafico di una funzione (di $M-1$ tra le variabili coordinate) che sia *almeno continua*.

Funzioni C^r a pezzi: - se $C \subseteq \mathbf{R}^M$ è un dominio C^r a pezzi, una $f : C \to \mathbf{R}^K$ si dice C^r a pezzi se è *continua* ed è C^r sull'interno di ogni pezzo.

Punti di frontiera e aperti regolari con frontiera C^r a pezzi - se $C \subseteq \mathbf{R}^M$ un $q \in \partial C$ si dice punto di frontiera C^r-*a pezzi* se localmente in q si ha che C e ∂C sono rispettivamente il sottografico e il grafico di una funzione C^r a pezzi. In particolare C è, localmente in q, normale.

- Si dice che un aperto A è regolare con frontiera C^r a pezzi se è la parte interna di un dominio C^r a pezzi con tutti i punti di frontiera C^r a pezzi.

- L'insieme $\partial^r A$ dei punti di ∂A che sono C^r regolari, cfr.FT 6bis, sono un aperto relativo della frontiera, che diremo (unione delle) facce aperte regolari di codimensione 1.

Sottovarietà C^r a pezzi: denotando le variabili coordinate $(x_1, \dots x_N)$ in $\mathbf{R}^N$, dato $0 < M < N$, un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^N$ si dice sottovarietà M dimensionale C^K *a pezzi* se localmente è grafico di una funzione vettoriale di M variabili C^K a pezzi:

per ogni $q \in E$

vi è un intorno W *aperto* in $\mathbf{R}^N$ di q per cui $W \cap E$ coincide con

il *grafico su un aperto* $A \subseteq \mathbf{R}^M$, che sai un dominio C^K a pezzi, di una funzione

$f = (f_{j_1}, \dots, f_{j_{N-M}}) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{N-M}})$, C^K a pezzi, delle rimanenti M coordinate.

Sottovarietà con bordo: un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^N$ si dice sottovarietà, M dimensionale di classe C^K a pezzi, *con bordo C^K a pezzi* se: per ogni $q \in E$

- o vale la condizione di varietà C^K a pezzi, q si dirà *interno relativamente* ad E, $q \in iE$;

- - oppure vi è un intorno W *aperto* in $\mathbf{R}^N$ di q per cui $W \cap E$ è

- il *grafico* di una funzione f che sia C^K a pezzi, di M variabili tra

le $x_1, \dots, x_N$ di $\mathbf{R}^N$, a valori nell' $\mathbf{R}^{N-M} \subseteq \mathbf{R}^N$ individuato dalle rimanenti,

- ove $U \cap \overline{A}$, A aperto regolare con frontiera C^K a pezzi di tale $\mathbf{R}^M$, e U aperto

di $\mathbf{R}^M$ per cui

$U \cap \overline{A}$ e $U \cap \partial A$ sono le intersezioni con il sottografico e con il grafico di una funzione ψ,

- inoltre f deve C^K anche nei punti delle facce aperte di codimensione 1 di A, $\partial^K A$.

- Infine $q \in Graf\ f_{|U \cap \partial A}$ (cioè $q \sim (p, f(p)) \sim (s, \psi(s), f(s, \psi(s)))$, $p = (s, \psi(s)) \in \partial A$).

In tal caso q si dirà di *bordo* per E, $q \in bE$.

Punti regolari Si diranno punti C^r regolari interni [di bordo] di una varietà C^K a pezzi quelli per cui vagono le condizioni di definizione di una varietà C^r regolare [con bordo].

<u>Osservazione:</u> nei punti che siano C^1 regolari [di bordo] di una varietà regolare a pezzi si definiscono il piano tangente [vettore tangente esterno in un punto di bordo] come per le varietà regolari.

<u>Osservazione:</u> per una superficie parametrica $\Psi : D \to \mathbf{R}^m$, $m > M$, non conviene dare una nozione diretta, completamente basata sulle sue proprietà di differenziabilità. Si fa riferimento alla nozione di varietà C^r a pezzi del suo sostegno e si analizza come collegare le caratteristiche geometriche di questo alla parametrizzazione.