Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 17
SVILUPPI DI TAYLOR

DERIVATE DIREZIONALI ITERATE

Se $v \in \mathbf{R}^d$ è non nullo è definito *l'operatore differenziale di derivazione* rispetto a v, che associa ad una funzione f di d variabili la sua eventuale derivata direzionale lungo v:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x) =: \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho \frac{\partial f}{\partial v}(x)\,,\ \rho \neq 0.$$

Se una funzione f è differenziabile in x si ha: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; d_x f\, v \;=\; \langle \nabla f(x), v\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$

Se $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena: $\quad g'(t) \;=\; \dfrac{\partial f}{\partial v}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x+tv).$
Si osserva che si ottiene *un polinomio omogeneo di primo grado*, cioè un *funzione lineare omogenea*, nelle variabili $v_1, \ldots, v_d$ delle coordinate di v. Nel caso si usa la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial v} \;=\; v\cdot\nabla\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; v\cdot\nabla f(x) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x).$$

Se f è due volte differenziabile iterando questo tipo di derivata, e per v indipendente da x :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, x_i}(x)$$

cioè, denotando con $Hf(x)$ la matrice Hessiana delle derivate parziali seconde in x:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \langle v\cdot Hf(x) v\rangle \;=\; {}^t v\cdot Hf(x) v.$$

Si osserva che si ottiene un *polinomio omogeneo di secondo grado*, cioè *una quadrica omogenea* nelle d variabili $v_1, \ldots, v_d$ che danno le coordinate di v.

Si useranno quindi anche le notazioni: $\quad \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2 \;=\; \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} \;=\; (v\cdot\nabla)^2\,.$
Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena:

$$g''(t) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^2 f(x+tv).$$

Iterando h volte si useranno le notazioni: $\dfrac{\partial}{\partial v}\ldots\dfrac{\partial}{\partial v} \;=\; \left(\dfrac{\partial}{\partial v}\right)^h \;=\; \dfrac{\partial^h}{\partial v^h} \;=\; (v\cdot\nabla)^h\,.$
Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena iterata h volte :

$$\frac{d^h g}{dt^h}(t) \;=\; \left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^h f}{\partial v^h}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^h f(x+tv)\;, \quad \text{quindi per } t=0$$

$$(v\cdot\nabla)^h f = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_d \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h f = (v\cdot\nabla)^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} v_i\,(v\cdot\nabla)^{h-1}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Anche in questo caso si ottiene un *polinomio omogeneo di grado* h, nelle d variabili $v_1, \ldots, v_d$ che danno le coordinate di v.

Per metter in evidenza la natura polinomiale, nelle coordinate della direzione, di queste derivate direzionali successive conviene usare anche le notazioni relative ai multi-indici.

MULTINDICI

Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbf{N}^d$ a componenti intere non negative, si dice *d-multi-indice*

La dimensione d si dice *lunghezza* del multi-indice.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma l^1): $\quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{d} p_i\,.$

Dati due multindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \leq \mathbf{p}$ per $q_1 \leq p_1\,,\ \ldots, q_d \leq p_d$.

Si definiscono: $\mathbf{p}! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!\,,\qquad \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdot \ldots \cdot \binom{p_d}{q_d},\quad \mathbf{p} \leq \mathbf{q},$

e per d variabili $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ si pone $\mathbf{y}^{\mathbf{p}} =: y_1^{p_1} \cdot \ldots y_d^{p_d}$.

LEMMA:(Sviluppo multinomiale) Si considerino le variabili $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_d)$, per cui $A_i + A_j = A_j + A_i, A_i A_j = A_j A_i,\ A_i(A_j + A_k) = A_i A_j + A_i A_k$. Allora

$$\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \ldots A_d)^h = \sum_{i=1}^{d} (A_1 + \ldots A_d)^{h-1} A_i = \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{h!}{\mathbf{p}!} A_1^{p_1} \cdot \cdots \cdot A_d^{p_d} = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \mathbf{A}^{\mathbf{p}}.$$

DIM. Il prodotto: $\quad \left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \cdots + A_d) \cdot \ldots h \text{ fattori} \cdots (A_1 + \ldots A_d +)$

per *distributività* e *commutatività* è un polinomo omogeneo di grado h del tipo $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{A}^{\mathbf{p}}$.

Si tratta, fissato il multindice $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ di lunghezza d e peso h, di calcolare $c_{\mathbf{p}}$, cioè di contare quante diverse scelte di addendi negli h fattori danno il monomio $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$. Si tratta di contare:

quante volte si sceglie: A_1 in p_1 fattori, A_2 in p_2 fattori , ... A_d in p_d fattori.

Tale numero "di volte" è appunto il coefficiente $c_{\mathbf{p}}$ di $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$ nello sviluppo di $\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h$.

Nell'ordine dato delle variabili: per A_1 si hanno $\binom{h}{p_1}$ scelte di p_1 fattori, quindi per A_2 ne rimangono $\binom{h-p_1}{p_2}$, per A_3 $\binom{h-p_1-p_2}{p_3}$,..., per A_{d-1} $\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}}$, per A_d rimane *una* scelta di p_d fattori. Ma $\binom{h}{p_1}\binom{h-p_1}{p_2}\binom{h-p_1-p_2}{p_3}\ldots\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}} = \dfrac{h!}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!} = \dfrac{h!}{\mathbf{p}!}$.

La relazione tra le derivate direzionali e i monomi è chiarita dalla seguenti convenzioni:

$$D^{\mathbf{p}} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_d^{p_d} = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} =: \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}};$$

quindi la relazione con le derivate e i multi-indici è messa in evidenza da:

COROLLARIO: Qualora si possa scambiare l'ordine di derivazione si ha:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)^h = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_d \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^h}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}$$

DIM. Posto $A_i = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ piuttosto che il prodotto tra numeri si considera come prodotto l'iterazione successiva di due derivazioni, e come somma la somma delle due derivazioni. Cioè si considerano le derivazioni come *operatori lineari* da funzioni a funzioni con il prodotto di composizione di operatori e la somma data dalla linearità degli operatori. Si osserva che per ipotesi le derivate commutano e per linearità si distribuiscono sulla somme. L'asserto segue dallo sviluppo multinomiale. Equivalentemente

$$\frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{v}^h}(x^0 + t\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)^h f(x^0 + t\mathbf{v}) = \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_h=1}^{d} \frac{\partial^h f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_h}}(x^0 + t\mathbf{v})\ v_{i_1} \ldots v_{i_h} =$$

$$= h! \sum \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0 + t\mathbf{v})\ \mathbf{v}^{\mathbf{p}} = h! \sum \frac{1}{p_1! \cdots p_d!} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}}(x^0 + t\mathbf{v})\ v_1^{p_1} \ldots v_d^{p_d}.$$

Il *differenziale di ordine* h si definisce come il polinomio omogeneo di grado h nelle variabili $v_1, \ldots, v_d$ dato da $D^{(h)}_{\mathbf{x}} f[v] = (\mathbf{v}\cdot\nabla)^h f(\mathbf{x})$.

IL TEOREMA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

TEOREMA Sia $f:\Omega\to\mathbf{R}$, $\mathbf{x}^0\in\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^d$, $f\in C^{k-1}(\Omega)$, e differenziabile k volte in $\mathbf{x}^0$ (le derivate parziali di ordine $k-1$ differenziabili in $\mathbf{x}^0$). Allora

a- esiste un polinomio $P(\mathbf{x})$ in $x_1,\ldots x_d$, di grado k, per cui $\dfrac{|f(\mathbf{x})-P(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k} \xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0]{} 0$

cioè
$$f(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)\ , \quad \text{per} \quad \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0.$$

b- Tale polinomio è **unico** e coincide con $P_k(\mathbf{x})$ il *polinomio di Taylor di grado* k *e centro* $\mathbf{x}^0$:
$$P_k(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\ \frac{\partial^h f}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^h}(x^0) = \sum_{h=0}^{k}\ \frac{1}{h!}\ \left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla\right)^h f(x^0) \ = \ \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k}\frac{1}{\mathbf{p}!}\frac{\partial^{|\mathbf{p}|}f}{\partial\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}.$$
L'identità $f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$ si dice *sviluppo di Taylor di ordine* k *e centro* $\mathbf{x}^0$, e la differenza $f(\mathbf{x})-P_k(\mathbf{x})$ *errore all'ordine* k nello sviluppo. Si ha

c- Se f è una funzione d i classe C^{k+1} in Ω allora il k-simo resto di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ per f può essere scritto nella forma
$$f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1}\frac{1}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}f(\mathbf{u})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}},$$
ove $\mathbf{u}$ è un punto del segmento di estremi $\mathbf{x}^0$ e $\mathbf{x}$

OSSERVAZIONE • Come osservato inizialmente riguardo alle derivate direzionali seconde:
$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{x}^0) = \ \langle \mathbf{v}\cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v}\rangle \ = \ {}^t\mathbf{v}\cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v}.$$
Pertanto i polinomi di Taylor del secondo ordine si scrivono:
$$\begin{aligned}P_2(\mathbf{x}) = &\ f(\mathbf{x}^0) \ + \ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) \ + \ \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot Hf(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \ = \\ = &\ f(\mathbf{x}^0) \ + \ (x_1-x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) + \cdots + (x_d-x_d^0)\frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}^0) \ + \\ + &\ \frac{1}{2}\left((x_1-x_1^0)^2\frac{\partial f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^0) + \ldots (x_d-x_d^0)^2\frac{\partial f}{\partial x_d^2}(\mathbf{x}^0)\right) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{i<j}^{d}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}^0)\end{aligned}$$

• L'unicità del polinomio di Taylor è, tra l'altro, utile nella pratica per ricavare polinomi di Taylor di funzioni di più variabili, da quelli notevoli di funzioni di una variabile, dalle quali sono ottenute le prime per composizione.

• Dal polinomio di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ e grado k, altrimenti calcolato, si possono quindi ottenere, per $|\mathbf{p}|\le k$, le derivate parziali $\dfrac{\partial^h f}{\partial\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)$ moltiplicando per $\mathbf{p}!$ il coefficiente del monomio $(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$.

DIM - *Si mostra l'unicità a priori* . Dati due polinomi P e Q, in d variabili di grado k, con tale proprietà di approssimazione per f, il polinomio $R=P-Q$, $R(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|\le k}\mathbf{c}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$, di grado minore o eguale a k, verifica: $\dfrac{R(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k}\to 0$, $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0$. Fissato $\mathbf{v}$, il polinomio di grado k di una variabile $r(t) = R(\mathbf{x}^0+\mathbf{v}t) = \displaystyle\sum_{1\le h\le k} t^h \sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|=h}\mathbf{c}_{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$ è $o(t^k)$ per $t\to 0$. Pertanto ha coefficienti $S_h(\mathbf{v}) =: \displaystyle\sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|=h}\mathbf{c}_{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$ (polinomi in $\mathbf{v}$) che calcolano la funzione nulla e quindi R

calcola la funzione nulla. Per ottenere che i coefficienti $\mathbf{c_p}$ di R sono nulli, lo si mostra per $S_h(\mathbf{v})$ per induzione sul numero di variabili.

- *Si mostra che il polinomio di Taylor soddisfa la proprietà di approssimazione.*

Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ si pone $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Se per tali t e $\mathbf{v}$ si usa lo sviluppo usuale di $g(t)$ in $t = 0$: $\quad f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) =$

$$= g(0) + g'(0)t + \dots \frac{1}{k!} g^k(0)t^k + \bar{o}(t^k) = f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}^0) t + \dots + \frac{1}{k!} \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \right)^k f(\mathbf{x}^0) t^k + \bar{o}(t^k) :$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0) + \dots + \frac{1}{k!} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla \right)^k f(\mathbf{x}^0) + \bar{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^k)$$

con resto $\bar{o}$ a priori dipendente dalla direzione $\mathbf{v}$, ovvero da $\mathbf{x}$ oltre che da $\mathbf{x}^0$ e $t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$, in quanto g dipende da sia da $\mathbf{x}^0$ che da $\mathbf{x}$. Per l'indipendenza dalla direzione $\mathbf{v}$ dell'andamento asintotico, per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, di $\bar{o}$, si usa la definizione di Frechet differenzaibilità in $\mathbf{x}^0$ delle derivate di ordine $k - 1$. Poichè la differenza tra $f(\mathbf{x})$ e il polinomio ha tutte le derivate parziali sino all'ordine k nulle in $\mathbf{x}^0$ ci si riconduce a provare il seguente:

LEMMA Se φ è $C^{k-1}(\Omega)$ con derivate parziali di ordine $k - 1$ differenziabili in $\mathbf{x}^0$, e tutte le derivate parziali sino all'ordine k sono nulle in $\mathbf{x}^0$ allora $\quad \varphi(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^k)$.

Per $k = 1$ è la definizone di differenziabilità di φ. Come sopra, con le stesse notazioni, si considera lo sviluppo di Taylor di $\varphi(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$ di ordine $k - 2$ con resto di Lagrange tenendo presente che tutte le derivate sono nulle in $\mathbf{x}^0$, vi è θ con $|\theta| \leq |t|$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \right)^{k-1} \varphi(\mathbf{x}^0 + \theta\mathbf{v}) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{|\mathbf{p}|=k-1} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^{k-1}\varphi}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \theta\mathbf{v}) =$$

per differenziabilità in $\mathbf{x}^0$ delle derivate di ordine $k - 1$, indipendemente da $\mathbf{v}$ e considerando che $o(|\theta|)$ è $o(|t|)$

$$= \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{|\mathbf{p}|=k-1} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \sum_{1 \leq i \leq d} \left(\theta \mathbf{v}_i \frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0) + o(|t|) \right) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{|\mathbf{p}|=k-1} \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \sum_{1 \leq i \leq d} o(|t|) = \ o(|t|^k)$$

c- Se $f \in C^{k+1}(\Omega)$ si ha la seguente dimostrazione, che indipendente dalla precedente, prova anche la proprietà di approssimazione del polinomio di Taylor di ordine $k + 1$.

Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Usando il resto di Lagrange dello sviluppo di ordine k di g vi è τ tra 0 e t per cui:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau)t^{k+1} =$$

$$= f(\mathbf{x}^0) + \dots + \frac{1}{k!} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla \right)^k f(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{(k+1)!} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla \right)^{k+1} f(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}).$$

Per i teoremi di Schwarz e multinomiale si ha

$$\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot \nabla \right)^{k+1} f(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \quad = \quad (k+1)! \quad \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}.$$

Ciò conclude la dimostrazione con $\mathbf{u} = \mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}$. Proseguendo si ha, come sopra scritto, una dimostrazione meno riposta della proprietà di approssimazione del polinomio di Taylor di grado $k + 1$ nell'ipotesi più forte $f \in C^{k+1}(\Omega)$:

$$\frac{\left| \displaystyle\sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0) \ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} - \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} \right|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{k+1}} \to 0 \ , \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0,$$

infatti tale rapporto è minore uguale a: $\displaystyle\sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0) \quad - \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau\mathbf{v}) \right| \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{k+1}}$,

e il primo e il terzo fattore di ogni addendo son limitati, mentre il secondo fattore è infinitesimo per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ grazie all'ipotesi di continuità delle derivate parziali di ordine $k + 1$ di f poichè $|\tau\mathbf{v}| \leq t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] pagg. 71-73 (secondo ordine in due variabili), pag. 85 (secondo ordine in piu' variabili);

[B] pag. 295 (secondo ordine in due variabili), pagg.360-362;

[F] pagg.159-165.