Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 22Bis
SUNTO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

CINQUE PUNTI

Qualsiasi siano le nozioni di misura N dimensionale in $\mathbf{R}^N$ e di integrale di funzioni in N variabili si desidera avere

1) (Misura del sottogarfico)
per funzione non negativa di N variabili

$$\int f(x_1,\ldots,x_N)dx_1\ldots dx_N \;=\; m_{N+1}\left(\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^{N+1}:\ 0\le y\le f(x)\right\}\right).$$

2) - (Beppo Levi, convergenza crescente non negativa)
se $f_{n+1}\ge f_n\ge 0,\ f_n(x)\to f(x)$, per ogni x tranne che in un insieme di misura nulla, allora

$$\int f_n(x)\,dx\to\int f(x)\,dx;$$

(Lebesgue, convergenza dominata)
se $|f_n(x)|\le g(x),\ f_n(x)\to f(x)$, per ogni x tranne che in un insieme di misura nulla, e $\int g(x)\,dx<+\infty$ allora

$$\int f_n(x)\,dx\to\int f(x)\,dx.$$

3) (Base per altezza)
se $E\subseteq\mathbf{R}^N$, $F\subseteq\mathbf{R}^M$ allora $m_{N+M}(E\times F)=m_N(E)\cdot m_M(F)$.

4)(Fubini-Tonelli: riduzione a integrali in una variabile e scambio ordine di integrazione)
se f è non negativa o il suo valore assoluto ha integrale finito, allora

$$\int f(x_1,\ldots,x_N)dx_1\ldots dx_N \;=\; \int\left(\ldots\int\left(\int f(x_1,\ldots x_N)dx_1\right)dx_2\ldots dx_{N-1}\right)dx_N.$$

e inoltre si possa cambiare l'ordine degli integrali di una variabile.

5)(formula dell'area)
se $M=\left(M^1|\ldots|M^N\right)$ è una matrice $N\times N$, e $\mathcal{P}$ è il parallelogramma generato dalle sue colonne $\mathcal{P}=M\left([0;1]^N\right)=\left\{t_1M^1+\cdots+t_NM^N:0\le t_1,\ldots,t_N\le 1\right\}$, allora

$$m_N(\mathcal{P}) \;=\; |\det M|, \text{ e in generale:}$$
$$m_N(M(E)) \;=\; |\det M|\cdot m_N(E).$$

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 22Bis

SUNTO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Per osservazioni, esempi e dimostrazioni si confronti con FT21 e FT22.

Misura ed integrale di Lebesgue FT21

I

I.1: Insiemi di misura nulla

I.1.1 Volume elementare - Si dice *rettangolo cartesiano* N-dimensionale in $\mathbf{R}^N$ il prodotto cartesiano $S_1 \times \cdots \times S_N$ di N segmenti $S_j \subset \mathbf{R}$ (ciascuno con o senza qualche estremo).
- Si dice *volume elementare* N *dimensionale* di un rettangolo cartesiano in $\mathbf{R}^N$ il prodotto delle lunghezze dei segmenti fattori: se S_i ha estremi $a_i \leq b_i$:

$$ve_N(S_1 \times \cdots \times S_N) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_N - a_N).$$

I.1.2 Insiemi nulli secondo Lebesgue Un $E \subseteq \mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, si dice N*-nullo* secondo Lebesgue se l'estremo inferiore delle serie dei volumi elementari al variare della successione di rettangoli che ricopre E è nullo: $\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} ve(R^k) : \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \right\} = 0,$

Validità 'quasi ovunque' Una proprietà P *vale quasi ovunque* o *per quasi ogni punto* (per la N-misura esterna), in breve *vale q.o. o per q.o.punto*, se il sottoinsieme di $\mathbf{R}^N$ ove *non è verificata,* $\{x \in \mathbf{R}^N : \quad non \;\; vale \;\; P(x)\}$*, è* N *nullo.*

Proposizione 1: - *Completezza:* i sottoinsiemi di un N-nullo son N-nulli.
- *Unione numerabile di insiemi* N*-nulli è* N*-nulla. Dim..* Cfr. FT21.

I.2: Gli insiemi Lebesgue misurabili e la misura di Lebesgue

I.2.1 Misura esterna Si definisce $m^*_N : \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) \to [0; +\infty]$, *misura esterna di Lebesgue*

$$m^*_N(E) \;=\; \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} ve(R^k) : \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k, \ R^k \text{ rettangoli cartesiani} \right\}, \quad E \subseteq \mathbf{R}^N$$

Approssimazione esterna con aperti: $m^*(E) = \inf\{m^*(A) : A \supseteq E, \text{ aperto}\}$;

Il problema dell'additività: *la misura esterna dell'unione di due sottoinsiemi senza parti in comune è la somma delle misure esterne di ognuno dei due sottoinsiemi ?*

I.2.2 Misurabilità à la Lebesgue: insiemi "quasi" aperti

La cosidetta misurabilità rispetto alla misura esterna garantisce le proprietà di additività della misura esterna. Senza assunzioni astratte, non si può dire se tutti i sottoinsiemi la verifichino.

Insiemi misurabili: - $E \subseteq \mathbf{R}^N$ si dice *misurabile secondo Lebesgue*, se per ogni $\varepsilon > 0$, vi è $A \subseteq \mathbf{R}^N$ *aperto*, e $\qquad E \subseteq A$, $m^*(A \setminus E) \leq \varepsilon$.
- Si indica con $\mathcal{M}_N \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ la famiglia dei misurabli di $\mathbf{R}^N$.

Invarianza per traslazioni: $E \in \mathcal{M}_N, \ v \in \mathbf{R}^N \implies v + E = \{x : x - v \in E\} \in \mathcal{M}_N$.

Teorema 1: proprietà dei misurabili im- $\emptyset \in \mathcal{M}_N$, $\mathbf{R}^N \in \mathcal{M}_N$;

iim- gli aperti di $\mathbf{R}^N$ sono elementi di $\mathcal{M}_N$; iiim- gli N-nulli sono elmenti di $\mathcal{M}_N$;

ivm- i rettangli cartesiani sono in $\mathcal{M}_N$; vm- i chiusi sono in $\mathcal{M}_N$;

vim- se $E, \ F \in \mathcal{M}_N$ allora $E \cap F$, $E \cup F$, $E \setminus F \in \mathcal{M}_N$; (i e vi: *algebra di sottoinsiemi*)

viim- se $E_h \in \mathcal{M}_N, \ h \in \mathbf{N}$ allora $\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h, \ \bigcap_{h=1}^{\infty} E_h \in \mathcal{M}_N$. (i, vi e vii: σ*-algebra*)

viii- se $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N$ allora $E \times F \in \mathcal{M}_{M+N}$. (prodotti cartesiani)

Le proprietà im) e vim) si dicono di *algebra*, mentre im), vim), viim) di σ-*algebra*. Le proprietà di algebra sono quanto serve per definire insiemi misurabili con congiunzioni, disgiunzioni e negazioni di formule. La proprietà di σ-algebra è utile per definire insiemi misurabili con formule che coinvolgono passaggi al limite di successioni. Le iim), iiim) e ivm) sono la richiesta minima di insiemi per avere passaggi al limite per una nozione di misura ragionevole.

Caratterizzazioni dei misurabili Sono equivalenti: ic- $M \in \mathcal{M}_N$,

iic- per ogni $\varepsilon > 0$ vi è $C \subseteq \mathbf{R}^N$ *chiuso* per cui

$$C \subseteq M \subseteq A\ , \quad \text{e} \ \ m_N^*(M \setminus C) \leq \varepsilon.$$

iiic- $$M = \mathcal{N} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{K}_n, \text{ ove } \mathcal{N} \text{ è } N\text{-nullo e i } \mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n+1} \text{ sono compatti.}$$

ivc - Se poi $m_N^*(M) < +\infty$ ic- è equivalente a $(U \triangle V =: (U \setminus V) \cup (V \setminus U))$

per ogni $\varepsilon > 0$ vi sono $R_1, \ldots, R_K$ N *rettangoli* cartesiani per cui

$$m_N^*(M \triangle (R_1 \cup \cdots \cup R_K)) \leq \varepsilon.$$

vc- *Misurabilità à la Caratheodory:* <u>per ogni</u> $F \subseteq \mathbf{R}^N$: $m^*(F) = m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M)$.

Approssimazione interna con compatti dei misurabili: Se $E \in \mathcal{M}_N$ allora

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E,\ \text{compatto}\};$$

vi sono quindi $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, compatti per cui $m\left(\bigcup K_n\right) = m(E)$.

Volendo: misurare gli aperti e gli insiemi di misura nulla, avere le proprietà del passaggio al complementare, di "passaggio al limite" per unioni numerabili, si ottengono i misurabili:

Teorema di generazione: - $\mathcal{M}_N$ è la *più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^N$ che contiene gli *aperti* e gli insiemi di *misura nulla* rispetto alla misura esterna N-dimensionale.
- $\mathcal{M}_N$ è la *più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^N$ che contiene i cubi chiusi N-dimensionali.

Di notevole interesse pratico son i *domini normali*:

Domini normali, o semplici cfr. FT 16 - un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^2$ si dice *dominio normale rispetto al primo asse coordinato*, o anche *semplice rispetto alla rimanente variabile* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni *continue* definite su un segmento chiuso: $D = \{(x, y) :\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\},\ f \leq g$;

- induttivamente un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^N$ si dice *dominio normale rispetto ad un* $N-1$ *piano coordinato* P, o anche *semplice rispetto alla rimanente variabile* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni continue definite su un dominio normale di P.

<u>Osservazione:</u> - le preimmagini di aperti e chiusi mediante funzioni continue, definite su di un insieme misurabile, essendo relativamente aperte o chiuse, e le loro intersezioni ed unioni *numerabili*, sono misurabili,

Teorema dell'immagine: data $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continua:

se trasforma insiemi nulli in insiemi nulli allora trasforma misurabili in misurabili

<u>Osservazione:</u> in dipendenza di assunzioni astratte *vale anche il viceversa*: se una funzione continua trasforma misurabili in misurabili allora trasforma nulli in nulli.

Dimostrazione: per iiic) (un misurabile è unione numerabile di compatti e di un nullo) si deduce subito il teorema di immagine.

Proposizione 5: le funzioni localmente Lipschitziane (con "rapporti incrementali limitati" su tutt le palle chiuse), da $\mathbf{R}^N$ in sè, trasformano insiemi nulli in insiemi nulli. *Dim.*. Cfr. FT21

<u>Osservazione:</u> le funzioni C^1, le funzioni lineari affini, trasformano misurabili in misurabili.

I.2.3 La misura di Lebesgue La restrizione di m_N^* a $\mathcal{M}_N$ si dice *misura di Lebesgue* e si indica con m_n: $m_N : \mathcal{M}_N \to [0; +\infty]$, per $E \in \mathcal{M}_N$ è $m_N(E) = m_N^*(E)$.

Teorema 2: proprietà della misura di Lebesgue

0- se R è un rettangolo si ha $m(R) = ve(R)$;

0bis- $m([0;1]^N) < +\infty$;

i- (nulla sul vuoto) $m_N(\emptyset) = 0$;

ii- (monotonia crescente) se $A \subseteq B \subseteq\in \mathcal{M}_N$ allora $m(A) \leq m(B)$;

iii- (numerabile additività) $E_k \in \mathcal{M}_N,\ E_k \cap E_h = \emptyset,\ k \neq h \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$;

iv- (invarianza per traslazioni) $m(E + x) = m(E)$;

ivbis- (N-positiva omogeneità) $m(\rho E) = |\rho|^N m(E)$;

v- (formula dell'area) se $L : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ è lineare e $E \in \mathcal{M}_N$ allora $m(L(E)) = |\mathrm{det\ L}| m(E)$;

vi- (prodotto di misure) se $E \in \mathcal{M}_M,\ F \in \mathcal{M}_N$ allora $m_{N+M}(E \times F) = m_M(E) m_N(F)$.

vii- (continuità per traslazioni) se $E \in \mathcal{M}_N,\ m(E) < \infty$ allora $m\left(E \triangle (E + h)\right) \xrightarrow[h \to 0_{\mathbf{R}^N}]{} 0$.

iiibis- (convergenza monotona) se $E_k \subseteq E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ allora $m(E_k) \xrightarrow[h \to \infty]{} m\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k\right)$.

iiiter-(convergenza dominata) $E_k \subseteq E \in \mathcal{M}_N, m_N(E) < \infty \Rightarrow m\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} m\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k\right)$.

iiiquater- (numerabile subadditività) se $E_k \in \mathcal{M}_N$, allora $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$;

Caratterizzazione della misura di Lebesgue

$$\text{Se } \mu : \mathcal{M}_N \to [0; +\infty]$$

soddisfa 0)bis, iii), iv) allora è un multiplo di m_n. Cioè vi è un numero $C_\mu \geq 0$ per cui

$$\mu(E) = C_\mu \cdot m_N(E), \text{ per ogni } E \in \mathcal{M}_N.$$

II
Integrazione alla Lebesgue

II.1: Funzioni misurabili ("quasi" continue) e convergenza quasi ovunque

II.1.1 Funzioni misurabili Una funzione $f : E \to \mathbf{R}^m$, $E \in \mathcal{M}_N$ si dice *Lebesgue misurabile* se la *preimmagine di un aperto è misurabile*, *i.e.* la *preimmagine di un aperto è quasi aperta.*

Proposizione 6: se f è misurabile e $\{x : g(x) \neq f(x)\}$ è nullo allora anche g è misurabile. In altri termini se g *coincide quasi ovunque con una funzione misurabile* allora è misurabile.

Osservazione: - $E \in \mathcal{M}_N$ se e solo se la sua funzione caratteristica χ_E è misurabile.

Proposizione 7: Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ è misurabile il suo sottografico stretto è $N+1$-misurabile, (e quindi lo sono il suo sottografico e i suoi sopragrafici).

Proposizione 8: $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^m$, è misurabile se e solo se lo sono $f_1, \ldots, f_m$.

Teorema di generazione 1 - Una funzione continua su $E \subseteq \mathbf{R}^N$, misurabile, è misurabile.
- Se $f : \mathbf{R}^N \to A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M$ misurabile, $F : A \to \mathbf{R}^m$ continua allora $F_o f$ è misurabile.
- Se $F : \Omega = \Omega^o \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ diffeomorfismo, $f : \mathrm{Im}F \to \mathbf{R}^m$ misurabile allora $f_o F : \Omega \to \mathbf{R}^m$ è misurabile. In particolare $x \mapsto f(Lx + v)$ è misurabile se L è lineare invertibile.

Teorema di generazione 2 - Le funzioni misurabili sono uno spazio vettoriale, e il prodotto di misurabili è misurabile. - Se f è misurabile $x \mapsto |f(x)|_M$ è misurabile.

Funzioni misurabili a valori reali estesi Si pone: $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, $+\infty + \infty = +\infty$, $+\infty \cdot r = +\infty$ per $r > 0$, $+\infty \cdot r = -\infty$ per $r < 0$, $+\infty \cdot 0 = 0$. Similmente per $-\infty$. Come per le funzioni a valori reali si dice che $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}$ è misurabile se tutti i suoi sottolivelli $\{x : f(x) \leq a\}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$, sono misurabili. Ciò è vero se e solo se $\{x : f(x) = -\infty\}$, $\{x : f(x) = +\infty\}$, $F = \{x : -\infty < f(x) < +\infty\} \in \mathcal{M}_N$ e la funzione $f \cdot \chi_F$ è misurabile.

II.1.2 Convergenza puntuale quasi ovunque: si dice che la sucessione di funzioni f_n : $E \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $E \in \mathcal{M}_N$ converge *puntualmente quasi ovunque* $(q.o.)$ in E se *per quasi ogni* x in E la successione numerica $f_n(x)$ è convergente per $n \to \infty$ ad un limite $f(x) \in \mathbf{R}$.

Teorema di generazione 3: limiti quasi ovunque di successioni di funzioni misurabili Se $f_n : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, misurabili convergono q. o. ad f le estensioni di f son misurabili.

Funzioni semplici Si dice *funzione semplice* una funzione con un numero finito di valori e misurabile. Equivalentemente una *combinazione lineare* di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Ovvero una funzione del tipo $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{M_k}(x)$, con $M_k \in \mathcal{M}_N$. Si noti che, ci si può sempre ridurre al caso in cui gli M_k siano disgiunti e gli a_k diversi: *forma normale.*

Funzioni numerabilmente semplici Si dice *funzione numerabilmente semplice* o σ-semplice, una funzione con un insieme numerabile di valori e misurabile. Equivalentemente una funzione del tipo $f(x) = \displaystyle\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k \chi_{M_k}(x)$, con $M_k \in \mathcal{M}_N$, *e anche* $M_h \cap M_k = \emptyset,\ h \neq k$.

Teorema di approssimazione con le funzioni semplici - Se $f \geq 0$ è misurabile vi è una successione *crescente di funzioni semplici* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ convergente puntualmente ad f:

$$\text{per ogni } x \text{ si ha } f_n(x) \uparrow f(x),\ n \to \infty.$$

- Se poi f è *limitata* si ha in più la convergenza *uniforme*: $\sup_x (f(x) - f_n(x)) =: s_n \downarrow 0,\ n \to \infty$.

Dim.: $$f_n(x) = \begin{cases} n\,, & f(x) \geq n \\ \dfrac{h-1}{2^n}, & \dfrac{h-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{h}{2^n} \\ & 1 \leq h \leq n2^n \end{cases} = \sum_{h=1}^{n2^n} \frac{h-1}{2^n} \chi_{f^{-1}[\frac{h-1}{2^n}, \frac{h}{2^n})} + n\chi_{f^{-1}[n;+\infty)}.$$

Come osservato in FT 9, i criteri di passaggio al limite sotto segno di integrale (alla Riemann) per funzioni continue e convergenza uniforme, si estenono alla classe delle funzioni misurabili con la convergenza quasi ovunque. Infatti dai teoremi di approssimazione per funzioni e per misurabili, si ottengono seguenti teoremi: il primo direttamente, il secondo utilizzando anche:
Separazione con funzioni continue dei chiusi: - se $C \subset A \subseteq \mathbf{R}^N$ sono un chiuso ed un aperto, allora vi è una *funzione continua su* $\mathbf{R}^N$ che vale 1 *su* C e vale 0 *su* $\mathbf{R}^n \setminus A$.
- Se poi C è compatto può essere scelta una funzione continua eguale ad 1 su C e nulla al di fuori di un altro compatto (contenente C).

Teorema di Severini-Egoroff: la convergenza *quasi ovunque* di una successione di funzioni misurabili è "*quasi uniforme*" sui limitati, cioè
uniforme sui limitati di un *insieme* chiuso con *complementare di misura arbitrariamente piccola.*
Se le funzioni sono nulle al di fuori di un insieme di misura finita tale sottoinsieme può essere scelto compatto:

$$\text{se } f_n : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}, \text{ sono misurabili, } f_n \xrightarrow[q.o.]{n\to\infty} f, \text{ allora:}$$

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ viè } C \text{ chiuso, } m_N(\mathbf{R}^N \setminus C) \le \varepsilon \text{ e } f_n \xrightarrow[unif.C]{n\to\infty} f;$$

$$\text{se inoltre } m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x : f_n(x) \neq 0\}\right) < +\infty, \text{ si può scegliere } C \text{ compatto.}$$

Teorema di Lusin: una funzione *misurabile* f è "*quasi continua*", cioè *coincide* su un *insieme chiuso* con *complementare di misura arbitrariamente piccola* con una *funzione continua su* $\mathbf{R}^N$ con norma uniforme non maggiore di quella di f.
Se la misura dell'insieme ove f è non nulla è finita, si possono scegliere una funzione continua nulla fuori da un compatto, e il sottoinsieme di coincidenza compatto:

$$\text{se } f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \text{ è misurabile, allora:}$$

$$\text{dato } \varepsilon > 0 \text{ vi sono } C \text{ chiuso, } m_N(\mathbf{R}^N \setminus C) \le \varepsilon \text{ e } g \in C(\mathbf{R}^N) \text{ per cui } f_{|C} \equiv g_{|C},\ \sup_{R^N} |g| \le \sup_{\mathbf{R}^N} |f|;$$

$$\text{se inoltre } m_N\left(\{x : f(x) \neq 0\}\right) < +\infty,$$

si possono scegliere C compatto, e g nulla al di fuori di una altro compatto.

II.2: L'integrale di Lebesgue

II.2.1 L'integrale di Lebesgue per funzioni non negative - Se $\sigma(x)=\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\chi_{M_k}(x) \geq 0$, è σ-semplice, eventualmente infinita, si definisce, convenendo che $\pm\infty \cdot 0 = 0$,

$$\int \sigma(x)dx = \int \sigma(x)dx_1 \ldots dx_N = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k m(E_k) \in [0;+\infty].$$

- In particolare $\quad m_N(E) = \int \chi_E(x)dx_1 \ldots dx_N.$
- Se f è *misurabile* a valori reali estesi *non negativa* si definisce

$$\int f(x)dx = \int f(x)dx_1 \ldots dx_N = \inf\left\{\int \sigma(x)dx : \ \sigma \geq f, \ \ \sigma \text{ num. sem.}\right\} \in [0;+\infty].$$

- Se $E\in \mathcal{M}_N$ si pone $\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx$, f si dirà *sommabile* su E se $\int_E f(x)dx < +\infty$.
- Se $F = (F_1,\ldots,F_m)$, è misurabile con componenti non negative sommabili, si definisce l'integrale come vettore con coordinate gli integrali delle componenti.

<u>Osservazione:</u> $\sigma(x) = \sum a_k\chi_{M_k}(x) \geq 0$ reale, si esprime come $\sigma(x) = \sum v_k\chi_{f^{-1}(\{v_k\})}(x)$ con $v_0 =0$, $v_k > v_{k-1}$: $\{v_k\}_{k>0} = \text{Im } f\setminus\{0\}$. Perciò $\int \sigma(x)\,dx = \sum (v_{k+1} - v_k)m(\{x\colon f(x) > v_k)$.

Teorema sull'integrablità. Se $f,\ g \geq 0$ sono misurabili non negative a valori $[0;+\infty]$ si ha:

iI- $\int f(x)dx = 0$ se e solo se $f = 0$ q. o., $m_N(\{f > 0\}) = 0$. Se $m(E) = 0$ si ha $\int_E f dx = 0$;

- se $\int f(x)dx < +\infty$ allora $f < +\infty$ quasi ovunque, $m_N(\{f = +\infty\}) = 0$;

iiI- *"affettamento" codominio* $\quad \int f(x)dx = \int_0^{+\infty} m\left(\{x : f(x) > v\}\right) dv$;

iiiI- se $\rho \in \overline{\mathbf{R}}$, $f \geq \rho g$ q.o si ha $\int (f(x) - \rho g(x))dx = \int f(x)dx - \rho \int g(x)dx$;

ivI- *monotonia* $f \geq g$ q. o. se e solo se $\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$ per ogni $E \in \mathcal{M}_N$,

Numerabile additività Se $E_h \in \mathcal{M}_N$, $h \in \mathbf{N}$, $E_h \cap E_k = \emptyset$, $h \neq k$, ed f è non negativa, allora: $\int_{\bigcup_{h\in\mathbf{N}} E_h} f(x)dx = \sum \int_{E_h} f(x)dx.$

Teorema di Beppo Levi di convergenza monotona Se $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ è una successione *crescente* di funzioni misurabile *non negative*, allora $\int f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$.

Teorema 4: misura dei grafici e sottografici
- Se $+\infty \geq f \geq 0$ è misurabile il suo *grafico in* $\mathbf{R}^{N+1}$ è $(N+1)$-nullo.
- Una funzione $+\infty \geq f \geq 0$ è misurabile se e solo se $\{(x,y) \in \mathbf{R}^N \times [0;+\infty) : \ y \leq f(x)\}$, il suo sottografico non negativo in $\mathbf{R}^{N+1}$, è in $\mathcal{M}_{N+1}$.
- Nel caso $\int f(x)dx_1 \ldots dx_n = m_{N+1}\left(\{(x,y) \in \mathbf{R}^N \times [0;+\infty) : \ y \leq f(x)\}\right)$.

Dimostrazione: FT 22.

II.2.2 Sommabilità ed integrabilità

Parte positiva e parte negativa - Per $r \in \mathbf{R}$ si pone $r^+ = \max\{r, 0\} = \dfrac{|r| + r}{2}$, $r^- = (-r)^+ = \max\{-r, 0\} = -\min\{r, 0\} = \dfrac{|r| - r}{2}$, si ha: $r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$.
- Se ϕ è una funzione a valori reali estesi $\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$, $\phi^-(x) = \max\{-\phi(x), 0\}$.

Funzioni integrabili e funzioni sommabili - f misurabile a valori reali estesi si dice *integrabile secondo Lebesgue* su $E \in \mathcal{M}_N$ se *almeno una tra* f^+ e f^- è sommabile su E;
- si dice *sommabile secondo Lebesgue* su E se *entrambe* f^+ e f^- sono sommabili su E:

$$\int_E f(x)dx \;=\; \int_E f^+(x)dx \;-\; \int_E f^-(x)dx.$$

- Se $F = (F_1, \ldots, F_m)$, è misurabile con componenti sommabili, si definisce l'integrale come vettore con coordinate gli integrali delle componenti.

<u>Osservazione:</u> diversamente dall'integrale di Riemann di funzioni limitate e di semplice integrabilità in senso generalizzato, in questo caso $|f|$ è sommabile se e solo se f lo è.

Teorema sulla sommabilità. iS- Se f è integrabile $\displaystyle\int f(x)dx = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.;

iiS- *invarianza per traslazioni* se f è integrabile, e $v \in \mathbf{R}^N$ si ha $\displaystyle\int f(v + x)\,dx \;=\; \int f(x)\,dx$;

- $\displaystyle\int f(x)dx \in \mathbf{R}$ se e solo se $|f| < +\infty$ quasi ovunque, $m_N(\{f = +\infty \ o \ f = -\infty\}) = 0$;

iiiS^1 - Le funzioni sommabili su E formano uno *spazio vettoriale* indicato con $\mathcal{L}^1(E)$,
- (linearità integrale) $\displaystyle\int_E (f(x) + \rho g(x))dx \;=\; \int_E f(x)dx \;+\; \rho\int_E g(x)dx$, $\rho \in \mathbf{R}$, $f,\ g \in \mathcal{L}^1(E)$,
- $\displaystyle\int_E |f(x)|dx$ definisce una *seminorma* su $\mathcal{L}^1(E)$;

iiiS^2 - Le funzioni f con $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(E)$ sono uno *spazio vettoriale* indicato con $\mathcal{L}^2(E)$
- $\displaystyle\int_E f(x)g(x)\,dx$ definisce per $f, g \in \mathcal{L}^2(E)$ un *prodotto scalare semidefinito*;

ivS- se $f,\ g \in \mathcal{L}^1$ allora $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{L}^1$, *proprietà di reticolo*;
- vale la *diseguaglianza triangolare:* $\displaystyle\left|\int f(x)dx\right| \leq \int |f(x)|dx$;

- se $f,\ g$ sono integrabili allora $f \geq g$ q.o. se e solo se $\forall E \in \mathcal{M}_N$ $\displaystyle\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$;

Numerabile additività - Se $E_h \in \mathcal{M}_N$, $h \in \mathbf{N}$, $E_h \cap E_k = \emptyset$, $h \neq k$, $E = \displaystyle\bigcup_{h \in \mathbf{N}} E_h$, $f \in \mathcal{L}^1(E)$, allora:

$$\int_{\bigcup_{h\in\mathbf{N}} E_h} f(x)dx \;=\; \sum_{h\in\mathbf{N}} \int_{E_h} f(x)dx. \text{ Quindi } \int_{A\cup B} f(x)dx \;=\; \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx - \int_{A\cap B} f(x)dx.$$

Teorema di Lebesgue di convergenza dominata Se $f_n(x)$ è una successione di funzioni integrabili, $g \in \mathcal{L}^1(E)$, se:
- vi è $m \in \mathbf{N}$ per q.o. $x \in E$ per ogni $n \geq m$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ (famiglia di funzioni *dominata*)
- per quasi ogni $x \in E$ esiste il limite $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$,

allora $\displaystyle\int_E f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f(x)dx$ e $\displaystyle\int_E |f_n(x) - f(x)|dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Teorema di completezza Gli spazi $\mathcal{L}^1(E)$ e $\mathcal{L}^2(E)$ sono completi con le rispettive seminorme.

II.3 Integrali dipendenti da parametri: (cfr. FT 9).

Proposizione 9: - sia $f = f(x,p) : \mathbf{R}^N \times D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq M$ spazio (quasi) metrico

- Dato p^0 di accumulazione per D, se p.q.o. x si ha $f(x,p) \xrightarrow[p \to p^0]{} f(x)$, e per $0 < d(p,p^0) < r$, la funzione $x \mapsto f(x,p)$ è misurabile allora $f(x)$ è misurabile;
- se inoltre p.q.o. x si ha $|f(x,p)| \le g(x)$ con g sommabile allora anche f lo è e

$$\int f(x,p)dx \xrightarrow[p \to p^0]{} \int f(x)dx.$$

Corollario: Sia $f = f(x,p) : \mathbf{R}^N \times D \to \mathbf{R}$, $D = D^o \subseteq \mathbf{R}^m$, se:

- $x \to f(x,p)$ è sommabile per ogni p,
- $p \mapsto f(x,p)$ è $C^1(D)$ per quasi ogni x,
- e dato p per qualche $r > 0$ $\sup_{|y-p| \le r} \left| \frac{\partial f}{\partial p_i}(x,y)) \right| \le g(x)$, con g sommabile,

allora

$$p \mapsto \int f(x,p)dx \quad \text{è} \quad C^1(D), \text{ e} \qquad \frac{\partial}{\partial p_i} \int f(x,p)dx \;=\; \int \frac{\partial f}{\partial p_i}(x,p)dx.$$

Convergenza monotona: - per il teorema di Beppo Levi valgono analoghi criteri.

- Per esempio se per quasi ogni x si ha che $f(x,t) \ge 0$ è crescente [decrescente] in $t \in (t_0 - r; t_0)$ $[t \in (t_0; t_0 + r)]$ parametro reale, misurabile in x per $t \ne t_0$ fissato, allora gli integrali per $t \uparrow t_0^-$ $[t \downarrow t_0^+]$ convergono all'integrale di $\lim_{t \uparrow t_0^-} \uparrow f(x,t)$ $[\lim_{t \downarrow t_0^+} \uparrow f(x,t)]$.

III: Collegamenti con l'integrale di Riemann e le funzioni continue

Teorema 5 - Se f limitata è Riemann integrabile su un segmento limitato allora è Lebesgue sommabile e gli integrali coincidono.

- Se f è Riemann integrabile su tutti i segmenti limitati chiusi che non includono i punti intorno a quali è illimitata, allora è assolutamente integrabile in senso improprio se e solo se è Lebesgue sommabile e gli integrali coincidono.
- Una funzione reale di variabile reale è Riemann integrabile su un segmento chiuso e limitato se e solo se l'insieme dei punti ove non è continua,

$$\{x : f(y) \not\xrightarrow[y \to x]{} f(x)\} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{x : \sup_{(y,z):\ |y-x| \le \frac{1}{n},\ |z-x| \le \frac{1}{n}} |f(y) - f(z)| \ge \frac{1}{k}\},$$ è Lebesgue nullo.

Teorema della media integrale Sia $K \subseteq \mathbf{R}^N$ *compatto e connesso (per archi).* Se f a valori reali è *continua* su K, e $D \subseteq K$ misurabile, allora

$$\text{vi è } \underline{x^0 \in K} \text{ per cui } f(x^0) \;=\; \frac{1}{m_N(D)} \int_D f(x)dx.$$

Dimostrazione: Se $\mu = \inf_k f$ e $M = \sup_K f$, per monotonia dell'integrale:

- $$\mu m_N(D) = \int_D \inf_K f\, dx \le \int_D f(x)dx \le \int_D \sup_K f\, dx = M m_N(D).$$
- Per Weierstrass vi sono $x^\mu \in K$, $x^M \in K$ per cui $\mu = f(x^\mu) = \min_K f$, $M = f(x^M) = \max_K f$.
- Sia quindi $\gamma : [0;1] \to K$ un cammino per cui $\gamma(0) = x^\mu$ e $\gamma(1) = x^M$. La funzione $f_o\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}$ è continua: per il teorema del valore intermedio vi è $\tau \in [0;1]$ per cui

$$f(\gamma(\tau)) \;=\; \frac{1}{m_N(K \cap D)} \int_{K \cap D} f(x)dx.$$

Si ottengono quindi i teoremi di approssimazione degli integrali di Lebesgue di funzioni continue con somme di "volumi" di rettangoli (base per altezza);

Proposizione 11: approssimazione esterna

siano $D \subseteq \mathbf{R}^N$ *chiuso limitato*, ed f *continua* su D.

Per ogni successione $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbf{N}$, di famiglie finite di N-rettangoli $R_1^n, \ldots, R_{K_n}^n$, chiusi, con interni disgiunti, per cui $D \subseteq U^{n+1} \subseteq U^n =: R_1^n \cup \cdots \cup R_{K_n}^n$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U^n = D$, $\max_{1 \le k \le K_n} \operatorname{diam}(R_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, e per qualsiasi scelta di $x^{k,n} \in R_k^n \cap D$, si ha:

$$f(x^{1,n}) m(R_1^n \cap D) \ + \ \ldots \ + \ f(x^{K_n,n}) m(R_{K_n}^n \cap D) \ \xrightarrow[n\to\infty]{} \ \int_D f(x)dx.$$

Raffinando un tale argomento si ottiene:

Proposizione 12: approssimazione interna

- se $D \subseteq \mathbf{R}^N$ è *aperto di misura finita*, f è *sommabile* su D ed *uniformemente continua* su D,
- o se f è *sommabile, continua e limitata* su D,
- oppure se D è un qualsiasi aperto, f è *uniformemente continua* su D, $f \ge 0$,

pur ammettendo che $\int_D f(x)dx = +\infty$,

allora:

per ogni successione $\mathcal{R}_n$, $n \in N$, di famiglie finite di N-rettangoli $R_1^n, \ldots, R_{K_n}^n$, chiusi, con parti interne disgiunte, per cui $U^n = R_1^n \cup \cdots \cup R_{K_n}^n \subseteq U^{n+1} \subseteq D$, e $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} U^n = D$, $\max_{1 \le k \le K_n} \operatorname{diam}(R_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, e per qualsiasi scelta di $x^{k,n} \in R_k^n$, si ha

$$f(x^{1,n}) m(R_1^n) \ + \ \ldots \ + \ f(x^{K_n,n}) m(R_{K_n}^n) \ \xrightarrow[n\to\infty]{} \ \int_D f(x).$$

TEOREMI PER IL CALCOLO DEGLI INTEGRALI FT22

I: scambio e accorpamento dell'ordine integrazione

Sezioni Se $E \subseteq \mathbf{R}^N$, siano V e W due sottospazi ortogonali complementari $V \oplus W = \mathbf{R}^N$, con proiezioni ortogonali P^V e P^W. La *sezione di* E parallela V, *di base* $w \in W$ è

$$S_V^w E = S^w E = \{x \in E : P^W x = w\},$$

la sua proiezione su V è denotata con $E_w^V = E_w = P^V S^w E$.

Teorema di Tonelli Se f è *misurabile* in $\mathbf{R}^N$, *non negativa*, e V e W sono sottospazi coordinati complementari identificati rispettivamente con $\mathbf{R}^M$, con coordinate $x_\sigma = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_M})$, ed $\mathbf{R}^{N-M}$, con coordinate $x_\tau = (x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_{N-M}})$, considerando la base canonica $\{e_i\}_{1 \le i \le N}$ di $\mathbf{R}^N$: $x = (x_1, \dots, x_N) = x_{\sigma_1} e_{\sigma_1} + \dots + x_{\sigma_M} e_{\sigma_M} + \dots + x_{\tau_{N-M}} e_{\tau_{N-M}}$.

i- per m_{N-M}-quasi ogni $x_\tau \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ si ha $x_\sigma \mapsto f(x)$ è *misurabile* in $\mathbf{R}^M$,

ii- la funzione $x_\tau \mapsto \displaystyle\int f(x) dx_\sigma$, definita m_{N-M} q.o., è *misurabile* in $\mathbf{R}^{N-M}$;

iii- $\displaystyle\int f(x) dx = \int \left(\int f(x) dx_\sigma \right) dx_\tau.$

Sostituendo le x_τ alle x_σ simmetricamente valgono i-, ii- e iii-, ciò comporta:

$$\int f(x) dx = \int \left(\int f(x) dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x) dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Teorema di Fubini Con le notazioni adottate, se f è *sommabile* su $\mathbf{R}^N$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, valgono analoghe conclusioni:

i- per m_{N-M}-quasi ogni $x_\tau \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ si ha $x_\sigma \mapsto f(x)$, è *sommabile* su $\mathbf{R}^M$,

ii- la funzione $x_\tau \mapsto \displaystyle\int f(x) dx_\sigma$, definita m_{N-M} q.o., è *sommabile* su $\mathbf{R}^{N-M}$;

simmetricamente per $x_\tau \mapsto f(x)$, e vale:

iii- $\displaystyle\int f(x) dx = \int \left(\int f(x) dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x) dx_\sigma \right) dx_\tau.$

Teorema di Fubini-Tonelli Con le precedenti notazioni, se f è *misurabile* in $\mathbf{R}^N$, e *almeno uno* degli *integrali iterati* del suo *valore assoluto* è *finito* $\displaystyle\int \left(\int |f(x)| \, dx_\sigma \right) dx_\tau < +\infty$ o $\displaystyle\int \left(\int |f(x)| \, dx_\tau \right) dx_\sigma < +\infty$, allora f è *sommabile* e

$$\int f(x) dx = \int \left(\int f(x) dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x) dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Osservazione: così facendo si riduce l'integrale ad *un'iterazione di integrali su* $\mathbf{R}$, potendo *permutare l'ordine di integrazione, e si possono usare le regole del calcolo in un variabile*:

$$\int f(x) dx = \int \left(\dots \left(\int \left[\int \left\{ \dots \int \left\{ \int f(x) dx_{\sigma_1} \right\} dx_{\sigma_2} \dots \right\} dx_{\sigma_M} \right] dx_{\tau_1} \right) \dots \right) dx_{\tau_{N-M}}.$$

Domini normali:

- Per domini normali (semplici rispetto ad una variabile) potrebbe convenire integrare per "fili" o per "fette" $(N-1)$-dimensionali. Per esempio $E = \{(x, y, z) : \phi(x, z) \le y \le \gamma(x, z),\ \Phi(z) \le x \le \Gamma(z),\ a \le z \le b\}$ si ha

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\{(x,y): \phi(x,z) \le y \le \gamma(x,z),\ \Phi(z) \le x \le \Gamma(z)\} = E_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \text{ per fette,}$$

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\{(x,z): \Phi(z) \le x \le \Gamma(z),\ a \le z \le b\} = P^{(x,z)}(E)} \left(\int_{\phi(x,z)}^{\gamma(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz, \text{ per fili.}$$

Iterando ci si riduce a $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\Phi(z)}^{\Gamma(z)} \left(\int_{\phi(x,z)}^{\gamma(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right) dx \right) dz,$

Esempi: - si considerino in $\mathbf{R}^2$ i seguenti quadrati di lato 2 sulla diagonale principale nel primo quadrante: $Q_0 = [0;2] \times [0;2], \ldots, Q_n = (2n, 2n) + Q_0 = [2n; 2n+2] \times [2n; 2n+2], \ldots,\ n \in \mathbf{N}$.

i- Si considerino anche i quadrati $R_n = (2,0) + Q_n^o$ traslati a destra di 2 degli interni dei Q_n.

- Sia quindi $g(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in Q_n \\ -1, & (x,y) \in R_n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$

- - Fissato $x \neq 2(n+1)$, $n \in N$ la $y \mapsto g(x,y)$ o è nulla per $x < 0$, o è la funzione caratteristica di $[0;2]$ per $0 \leq x < 2$, o è la differenza tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza per $2(n+1) < x < 2(n+2)$. Pertanto per $x \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$

$$\int g(x,y)dy = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2(n+1) < x < 2(n+2) \text{ o } x < 0 \end{cases}. \text{ Pertanto } \int \left(\int g(x,y)\,dy \right) dx = 4.$$

- - Invece fissato $y \neq 2(n+1)$, $n \in N$ la $y \mapsto g(x,y)$ o è nulla per $y < 0$, o è sempre differenza funzione tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza.

Quindi $y \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$ si ha $\displaystyle\int g(x,y)dx = 0$, per cui $\displaystyle\int \left(\int g(x,y)\,dx \right) dy = 0$.

ii- Ognuno dei Q_n sia invece suddiviso in quattro quadrati di lato 1 dagli assi dei lati: Q_n^{--}, Q_n^{+-}, Q_n^{++}, Q_n^{-+} ove: $Q_n^{ab} = (2n, 2n) + Q_0^{ab}$, e $Q_0^{--} = (0;1) \times (0;1)$, $Q_0^{+-} = (1;2) \times (0;1)$, $Q_0^{++} = (1;2) \times (1;2)$, $Q_0^{-+} = (0;1) \times (1;2)$. Sia quindi $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in Q_n^{--} \cup Q_N^{++} \\ -1, & (x,y) \in Q_n^{+-} \cup Q_N^{-+} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$

- - Si ha: $f(x,y) = f(y,x)$, fissato x la $y \to f(x,y)$ è, a parte gli x del tipo $2n$, o nulla o è la differenza tra le caratterstiche di due intervalli disgiunti di egual lunghezza, è quindi con integrale nullo. Cioè $y \mapsto \displaystyle\int f(x,y)dy = x \mapsto \int f(x,y)dx \equiv 0$. Per cui sono sommabili e $\displaystyle\int \left(\int f(x,y)dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)dx \right) dy = 0$.

- - D'altra parte $|f(x,y)| = \begin{cases} 1, & (x,y) \in Q_n \setminus \text{assi} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quindi

$$\int |f(x,y)|dxdy = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_{Q_n} dxdy = \sum_{n\in\mathbf{N}} m_2(Q_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} 4 = +\infty.$$

Esercizio: (cfr. FT9 paragrafo successioni di successioni) si trovi una successione a due indici $a_{m,n} \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{N}$ per cui le serie $\displaystyle\sum_m a_{m,n}$, $\displaystyle\sum_n a_{m,n}$, $\displaystyle\sum_m \sum_n a_{m,n}$, $\displaystyle\sum_m \sum_n a_{m,n}$, siano convergenti ma $\displaystyle\sum_m \sum_n a_{m,n} \neq \sum_m \sum_n a_{m,n}$

II: cambiamenti di variabili negli integrali e formula dell'area

II.1: il caso "finito".

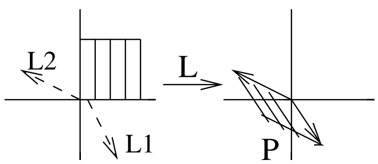
3.1- **Trasformazioni lineari:** - se $L : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ è lineare affine allora per $E,\ F \in \mathcal{M}_N$ si ha

$$L(E) \in \mathcal{M}_N \text{ e } \quad m(L(E)) = |\det L| m(E) \quad , \quad \text{ e se } L \text{ è invertibile } \ m_N(F) = \frac{1}{|\det L|} m_N(L^{-1}F).$$

Cioè, considerando che le funzioni *lineari* affini hanno *jacobiano costante* $JL(x)v = Lv$:

$$m(L(E)) = \int_{L(E)} dy \quad = \int \chi_{L(E)}(y)\, dy = |\det L| m(E) = \int \chi_E(x)|\ \det L| dx = \int_E |\ \det JL(x)| dx,$$

- **Misura parallelepipedi di dimensione massima:** il parellelepipedo $P = P(L)$ generato dai vettori-spigoli $L^1, \dots, L^N \in \mathbf{R}^N$, linearmente indipendenti, ovvero di vertici $\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, L^1, \dots, L^N, L^1 + L^2, \dots, L^1 + L^N, \dots, L^1 + \dots + L^N$, è l'immagine dell'ipercubo unitario $[0;1]^N$ per la funzione lineare associata alla matrice $L = \left(L^1 | \dots | L^N\right)$: $P = L[0;1]^N$.



Quindi si ha: $\quad m_N\left(P(L)\right) \ = \ |\det L| \cdot m_N\left([0;1]^N\right) \ = \ |\det L|.$

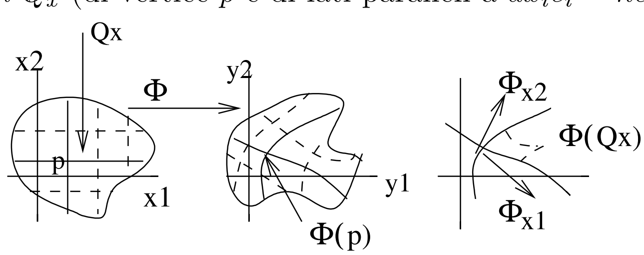
Mediante approssimazione con funzioni semplici, per i teoremi di passaggio al limite dell'integrale:
3.2 - **Trasformazioni lineari:** Siano: L lineare affine, f, g funzioni misurabili non negative, o anche integrabili, su E, misurabile, allora

$$\int_{L(E)} f(y) dy \ = |\det\ L| \int_E f(L(x))\, dx = \ \int_E f(L(x)) |\det\ JL(x)|\, dx, \qquad dy = |\det L| dx,$$

$$\text{per } L \text{ invertibile } \ \int_{L(E)} g(L^{-1}(y)) dy \ = |\det\ L| \int_E g(x)\, dx = \ \int_E g(x) |\det\ JL(x)|\, dx.$$

II.2: il caso "infinitesimo".

1) per scegliere *nel codominio gli elementi inifinitesimi di volume* $dy_1 \dots dy_N$, *invece* di suddividere direttamente l'immagine $\Phi(E)$ in ipercubi Q_y, cartesiani *rispetto alle coordinate* y *del codominio*, (di vertice $\Phi(p)$ e di lati paralleli a $dy_i e_i^{\mathbf{R}^N} \sim k e_i^{\mathbf{R}^N}$: $\Phi_1(p) \le y_1 \le \Phi_1(p) + k, \dots, \Phi_N(p) \le y_N \le \Phi_N(p) + k$), la si suddivide con *i trasformati* $\Phi(p + Q_x)$ *dei traslati in* p *degli ipercubi coordinati* Q_x (di vertice p e di lati paralleli a $dx_i e_i \sim h e_i$, nel dominio):



2) - i "volumi" dei $\Phi(p + Q_x)$ vengono a loro volta approssimati dai "volumi" degli N-*parallelepipedi tangenti*, con vertice in $\Phi(p)$ e spigoli generatori $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p)h, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_N}(p)h$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p) dx_i = J\Phi(p) dx_i e_i^{\mathbf{R}^N}, \text{ piuttosto che } dy_i e_i^{\mathbf{R}^N},$$

ovvero i traslati in $\Phi(p)$ dei trasformati di Q_x mediante lo jacobiano in p di Φ: $J\Phi(p)Q_x$. Questi si sanno calcolare e sono $|\det J\Phi(p)| h^N$. Questi sono gli *elementi infinitesimi di volume* dy scelti nel codominio, e similmente al caso finito si ottiene:

$$dy \quad = |dy_1 \dots dy_N| \sim |\det J\Phi(p)||dx_1 \dots dx_N| = \quad |\det J\Phi(p)| dx.$$

4.1.1 - **"Volume" dell'immagine:** Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, *iniettiva*, $\det D_x\Phi \neq 0$ per $x \in A$. Allora per ogni E misurabile contenuto in A

$$m_N\big(\Phi(E)\big) \;=\; \int_E |\det J\Phi(x)|\, dx.$$

Punti e valori critici: - per una funzione $\Psi : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, differenziabile su A aperto, si dice insieme dei *punti critici*, l'insieme $C_\Psi = \{x \in A : D_x\Psi$ non è di rango massimo$\} =$

$$= \{x \in A : \det\left[{}^tJ\Psi(x)\, J\Psi(x)\right] = 0,\ \det\left[J\Psi(x)\, {}^tJ\Psi(x)\right] = 0\}.$$

- La sua immagine $VC_\Psi = \Psi(C_\Psi)$ insieme dei *valori critici*.

Lemma: $\Psi : A \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, $C_\Psi = \{x \in A : \det J\Psi(x) = 0\}$, allora
l'insieme dei *valori critici è nullo*: $m_N\big(\Psi(C_\Psi)\big) = 0$.

Essenziale iniettività: una tale Φ si dice *essenzialmente iniettiva*, se è *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$.

4.1.2 - Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$ *essenziale iniettività*. Allora per ogni E misurabile in $A \setminus C_\Phi$, contenuto in A $m_N\big(\Phi(E)\big) \;=\; \int_E |\det J\Phi(x)|\, dx.$

4.1.3 - Sia $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto, *che trasformi nulli in nulli*, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m\big(\overline{\Omega} \setminus A\big) = 0$, ed *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$. Allora per ogni E misurabile in $\overline{\Omega} \setminus C_\Phi$

$$m_N\big(\Phi(E)\big) \;=\; \int_{A\cap E} |\det J\Phi(x)|\, dx.$$

<u>Osservazione:</u> le ipotesi comportano che $m(\partial\Omega) = 0$: $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega} \setminus A$.

4.2.1 - **Cambiamenti di variabile:** Sia $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto,
che *trasformi nulli in nulli*, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m(\overline{\Omega} \setminus A) = 0$, ed iniettiva su $A \setminus C_\Phi$:
i - per ogni $f : \Phi(\overline{\Omega}) \to [0; +\infty]$, misurabile, si ha che $f_o\Phi|\det J\Phi(x)|$ è misurabile e

$$\int_{\Phi(\overline{\Omega})} f(y)\, dy \;=\; \int_A f\big(\Phi(x)\big)|\det J\Phi(x)|\, dx,$$

- - inoltre per ogni $f : \Phi(\overline{\Omega}) \to \overline{\mathbf{R}}$ misurabile si ha che f è sommabile su $\Phi(\overline{\Omega})$ se e solo se $f_o\Phi|\det J\Phi|$ lo è su A, e vale la formula soprascritta.

ii - Per ogni $g : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbf{R}}$, con $g|\det J\Phi|$ misurabile, si ha che $g_o\Phi|^{-1}_{A\setminus C_\Phi}$ è misurabile, e se *o* $g \geq 0$ *o anche* $g \cdot |\det J\Phi|$ integrabile, si ha l'uguaglianza

$$\int_{\Phi(A\setminus C_\Phi)} g(\Phi|^{-1}_{A\setminus C_\Phi}(y))\, dy \;=\; \int_A g(x)|\det J\Phi(x)|\, dx,$$

ovvero prolungando arbitrariamente $g_o\Phi|^{-1}_{A\setminus C_\Phi}$ sull'insieme nullo $\Phi(\overline{\Omega} \setminus A) \cup \Phi(C_\Phi)$, e $|\det J\Phi(x)|$ sull'iniseme nullo $\overline{\Omega} \setminus A$: $\displaystyle\int_{\Phi(\overline{\Omega})} g(\Phi|^{-1}_{A\setminus C_\Phi}(y))\, dy \;=\; \int_{\overline{\Omega}} g(x)|\det J\Phi(x)|\, dx,$

<u>Osservazione:</u> - tali formule *non corrispondono* all'usuale formula di cambiamento di variabili in una variabile, che riguarda il concetto di *integrale orientato*. Questa non richiede l'iniettività di Φ e non compare il valore assoluto della derivata:

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y)\, dy \;=\; \int_a^b f(\Phi(x))\Phi'(x)\, dx, \qquad a \leq b$$

ivi la mancanza di iniettività di $\Phi : [a; b] \to \mathbf{R}$ comporta *cancellazioni*, infatti l'integrale è "sensibile" al cambiamento di segno di Φ', e può essere $\Phi(b) < \Phi(a)$.

- Queste formule in una variabile, in ipotesi di iniettività di Φ, diventeno invece:

$$\int_{\min\{\Phi(a),\Phi(b)\}}^{\max\{\Phi(a),\Phi(b)\}} f(y)\, dy \;=\; \int_a^b f(\Phi(x))\, |\Phi'(x)|\, dx, \qquad a \leq b$$

Mancando iniettività la presenza del valore assoluto dello jacobiano dà sovrapposizione: i valori $y \in \Phi(\overline{\Omega})$ hanno la *molteplictà* del numero di elementi della loro preimmagine mediante Φ. Un enunciato che tiene conto di questo è il seguente.

Notazione: se H è un insieme con $\#H$ si indica il numero dei suoi elementi se finito, altrimenti si pone $\#H = \infty$. Si usa la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

4.2.2 - **Molteplicità:** Sia $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto,
che trasformi nulli in nulli, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m(\overline{\Omega} \setminus A) = 0$.

i - per ogni $f : \Phi(\overline{\Omega}) \to [0; +\infty]$, misurabile, si ha che $f{\circ}\Phi|\det J\Phi(x)|$, $y \mapsto f(y)\#\left(\Phi^{-1}\{y\}\right)$ sono misurabili, rispettivamente su $\overline{\Omega}$ e $\Phi(\overline{\Omega})$, e vale l'identità

$$\int_{\Phi(\overline{\Omega})} f(y)\#\left(\Phi^{-1}\{y\}\right)\, dy \;=\; \int_A f\big(\Phi(x)\big)|\det J\Phi(x)|\, dx,$$

- - inoltre per ogni $f : \Phi(\overline{\Omega}) \to \overline{\mathbf{R}}$ misurabile si ha che $y \mapsto f(y)\#\Phi^{-1}(\{y\})$ è sommabile su $\Phi(\overline{\Omega})$ se e solo se $f{\circ}\Phi|\det J\Phi|$ lo è su A, e vale la formula soprascritta.

ii - Per ogni $g : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbf{R}}$, con $g|\det J\Phi|$ misurabile, per cui o $g \geq 0$ o anche $g \cdot |\det J\Phi|$ sia integrabile, $\displaystyle\int\limits_{\Phi(\overline{\Omega})} \sum_{x \in \Phi^{-1}\{y\}} g(x)\; dy \;=\; \int\limits_A g(x)|\det J\Phi(x)|\, dx,$

ove si intende che, dato un insieme di indici I, e una funzione $\alpha \geq 0$, la scrittura $\displaystyle\sum_{i \in I} \alpha(i)$

sta per $\displaystyle\sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ finito}}} \sum_{i \in J} \alpha(i)$: nel caso $I = \Phi^{-1}(\{y\})$, $\alpha(x) = g(x)$.

Trasformazioni ammissibili: le Φ che verificano le ipotesi dei teoremi saranno dette *trasformazioni ammissibili.* Nel caso di essenziale iniettività *cambiamenti di coordinate ammissibili.*

Coordinate polari e cilindriche: - $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$,
$\overline{\Omega} = [0; +\infty) \times [0; 2\pi]$, $\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; 2\pi)$, $\det J\Phi(r, \phi) = r$, $C_\phi \cap A = \emptyset$: cfr. FT 13.
- $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(r, \phi, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $\overline{\Omega} = [0; +\infty) \times [0; 2\pi] \times \mathbf{R}$,
$\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; 2\pi) \times \mathbf{R}$, $\det J\Phi(r, \phi, z) = r$, $C_\phi \cap A = \emptyset$: cfr.FT13.

Coordinate sferiche geografiche: - $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(r, \phi, \theta) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$,
$\overline{\Omega} = [0; +\infty) \times [-\pi; \pi] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\Omega = A = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$,
$\det J\Phi(r, \phi, \theta) = r^2\cos\theta$, $C_\Phi \cap A = \emptyset$: cfr FT 13.
- Per $\overline{\Omega} = [0; R] \times [0; 2h\pi] \times [0; k\pi]$, $h, \ \geq 1$, $\Omega = A = (0; R) \times (0; 2h\pi) \times (0; k\pi)$,
$\Phi\big(\overline{\Omega}\big) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$:

$$M \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = M \cdot m(\Phi(\overline{\Omega})) = \int\limits_{\overline{\Omega}} |\det J\Phi(x)|\, dx = \int_0^{2h\pi}\int_0^{k\pi}\int_0^R r^2|\cos\theta|\; dr\, d\theta\, d\phi =$$

$$= 2h\pi\sum_{m=1}^{k}\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\cos\theta|\, d\theta\, \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2h}{3}\pi R^3 k\int_0^{\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{4h}{3}\pi R^3 k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{4hk}{3}\pi R^3:$$

$$M = hk.$$

Funzioni radiali: sia $f(x, y, z) = g(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, integrabile o non negativa e misurabile, considerando il cambiamento di coordnate sferiche $\Phi(r, \phi, \theta) = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$, iniettivo su $\Omega = A = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\Phi(\overline{\Omega}) = \mathbf{R}^3$, per 4.2 si ha $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z)\, dxdydz \;=$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(r)r^2\cos\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = 4\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r)r^2\cos\theta\, d\theta\, dr = 4\pi\int_0^{+\infty} g(r)r^2\, dr.$$

Guldino-Pappo, solidi di rotazione: *Guldino-Pappo 1.0* - si consideri $x = \gamma(z)$, con γ misurabile *non negativa*, e D_α il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ ottenuto facendo ruotare il sottografico positivo di γ, sottoinsieme G del piano $y = 0$, attorno all'asse delle z (definito da $x = y = 0$, e contenente il *dominio della funzione*) di una angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, ortogonalmente all'asse:
$D_\alpha = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le \gamma(z), x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\phi, y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\phi \text{ con } \phi \in [0; \alpha]\}$.
Considerando il cambiamento di coordiante cilindriche $\Phi(r, \phi, z)$ iniettivo su $\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; \alpha) \times \mathbf{R}$, $E = E_\alpha = \{(r, \phi, z) : r \le \gamma(z),\ 0 \le \phi \le \alpha\}$, $\Phi(E) = D_\alpha$, usando 4.1 si ha:

$$\mathrm{vol}(D_\alpha) = m_3(E) = \int\limits_{\Omega\cap E} |\det J\Phi(r, \phi, z)|\, dr\, d\phi\, dz = \int_0^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\gamma(z)} r\, dr\, dz\, d\phi = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(z)\, dz.$$

Guldino-Pappo 1.1 - nel piano delle (x, z), definito da $y = 0$, si consideri un qualsiasi insieme misurabile G *contenuto nel semipiano* definito da $x \ge 0$. Sia D_α il dominio in $\mathbf{R}^3$ ottenuto facendo ruotare G attorno all'asse delle z ($x = y = 0$) di una angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, ortogonalmente all'asse. Come sopra con il cambiamento di coordinate cilindriche Φ su $E = E_\alpha = \{(r, \phi, z) :\ (r, z) \in G,\ 0 \le \phi \le \alpha\}$, $\Phi(E) = D_\alpha$ si ha integrando per fette (r, z): $\mathrm{vol} D_\alpha =$

$$= \int\limits_E |\det J\Phi(r, \phi, z)|\, dr d\phi dz = \int_0^\alpha \left(\int\limits_{E_\phi} r\, dr\, dz \right) d\phi = \int_0^\alpha \left(\int\limits_G r\, dr\, dz \right) d\phi = \alpha \int_G r\, dr\, dz.$$

- - *Interpretazione geometrica:* il baricentro di G avrà prima coordinata uguale a $\dfrac{1}{\text{area } (G)} \displaystyle\int\limits_G x\, dx\, dz$.

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol} D_\alpha &= \alpha \cdot \text{ area } (G) \cdot \text{ coordinata ortogonale all'asse di rotazione del baricentro di } G \ = \\ &= \alpha \cdot \text{ area } (G) \cdot \text{distanza dall'asse di rotazione del baricentro di } G \ = \\ &= \text{ area } (G) \cdot \text{lunghezza arco di circonferenza percorso dal baricentro di } G. \end{aligned}$$

Guldino-Pappo 1.2 - si tratta di calcolare il volume del solido di rotazione ortogonale, per un angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, dell'intragrafico tra due funzioni reali di una variabile, non attorno all'asse del dominio, ma attorno *all'asse del codominio*.
Date le funzioni $\beta \le \gamma$ di dominio l'intervallo $J \subseteq [0; +\infty)$, sia G l'intragrafico nel piano (x, z) definito da $\beta(x) \le z \le \gamma(x)$, $x \in J$. Sia quindi D_α il solido di rotazione attorno all'asse delle z, definito da $x = y = 0$ ed identificato con il *codominio* delle funzioni:

$$\begin{aligned} D_\alpha \ = \ \{(x, y, z) : \beta(\sqrt{x^2 + y^2}) \le z \le \gamma(\sqrt{x^2 + y^2}),\ \sqrt{x^2 + y^2} \in J, \\ x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\phi,\ y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\phi \text{ con } \phi \in [0; \alpha]\}. \end{aligned}$$

Essendo $\mathrm{area}(G) = \displaystyle\int\limits_J (\gamma(x) - \beta(x))\, dx$, ed il baricentro di G di coordinate

$$\frac{1}{\displaystyle\int\limits_J (\gamma(x) - \beta(x))\, dx} \left(\int\limits_J \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} x\, dz\, dx\, ,\ \int\limits_J \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} z\, dz\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\int\limits_J (\gamma(x) - \beta(x))\, dx} \left(\int\limits_J (\gamma(x) - \beta(x))\, x\, dx\, ,\ \int\limits_J \frac{\gamma^2(x) - \beta^2(x)}{2}\, dx \right), \text{ si ha}$$

$$\mathrm{vol}\ (D_\alpha) \ = \ \alpha \cdot \int\limits_J (\gamma(x) - \beta(x))\, x\, dx.$$

Integrali dipendenti da parametri per domini variabili. - In FT 9, 13, 21 si sono discusse le funzioni definite da integrali dipendenti da parametri, e, in una variabile, FT 9, 13, la dipendenza da parametri degli estremi del segmento di integrazione.
- Per gli integrali in più variabili un *primo passo* in questa direzione si può fare se la dipendenza del dominio di integrazione dal parametro è dovuta al fatto che esso è l'*immagine* di un dominio da esso indipendente mediante un *cambiamento di coordinate ammissibile dipendente dal parametro*. In tal caso la formula di cambiamento di variabili permette di *riportare la dipendenza* dal dominio di integrazione *all'integranda*. Per semplicità si considerano cambiamenti di coordinate che siano diffeomorfismi C^1 su chiusure di aperti con frontiera di misura nulla:

$$\Omega_t = \Phi_t(\Omega),\ \Phi_t(x) = F(t,x),\ \Omega \subseteq \mathbf{R}^m \text{ aperto con } m_m(\partial\Omega) = 0,$$

$$(F_1,\dots,F_m) = F : I \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m, \text{ continua in } (t,x), \text{ e per ogni } t \in I,$$

$$x \mapsto F(t,x) = \Phi_t(x) \text{ sia } C^1(\mathbf{R}^m) \text{ iniettiva con matrice jacobiana } J_xF(t,x) = J\Phi_t(x) \text{ invertibile:}$$

$$\mathcal{F}(t) =: \int_{\Omega_t} f(y)\,dy \ = \ \int_\Omega f(\Phi_t(x))|\mathrm{det}J\Phi_t(x)|\,dx.$$

- Per lo studio di $\mathcal{F}$, quando il parametro t vari in $I \subseteq \mathbf{R}^M$, può esser utile derivare l'integrale parametrico, *e.g.* per trovare i punti stazionari in vista di un problema di ottimizzazione. Si ricorre ai teoremi di derivazione di integrali parametrici: fattore dell'integranda $f(\Phi_t(x)) = f(F(t,x))$ si deriva grazie alla regola della catena. Il fattore $|\mathrm{det}J\Phi_t(x)| = |\mathrm{det}J_xF(t,x)|$ si deriva usando la formula per il differenziale del determinante, cfr. FT 12. Nelle dovute ipotesi su f ed F per applicare i criteri di derivabilità (per esempio, ferme le assunzioni fatte su F, $I \subseteq \mathbf{R}^k$ aperto, per ogni $x \in \mathbf{R}^m$ anche $t \mapsto F(t,x)$ sia $C^1(I)$): $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial t_h}(t) \ =$

$$= \int_\Omega \left[\left\langle \nabla f(\Phi_t(x)) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(x)\right\rangle + f(\Phi_t(x)) \cdot tr\left((J\Phi_t(x))^{-1}\,\frac{\partial J\Phi_t}{\partial t_h}(x)\right)\right] |\mathrm{det}J\Phi_t(x)|\,dx =$$

nelle opportune ipotesi (vedi sotto) si scambia l'ordine di derivazione tra t e le x_i

$$= \int_\Omega \left[\left\langle \nabla f(\Phi_t(x)) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(x)\right\rangle + f(\Phi_t(x)) \cdot tr\left((J\Phi_t(x))^{-1}\,J\left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}\right](x)\right)\right] |\mathrm{det}J\Phi_t(x)|\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y))\right\rangle + f(y) \cdot tr\left(\left(J\Phi_t^{-1}(y)\right) J\left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}\right](\Phi^{-1}(y))\right)\right] dy =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y))\right\rangle + f(y) \cdot tr\left(J\left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}\right](\Phi^{-1}(y))J\Phi_t^{-1}(y)\right)\right] dy =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y))\right\rangle + f(y) \cdot tr\left(J\left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y))\right]\right)\right] dy, \text{ quindi}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t_h}(t) = \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y))\right\rangle + f(y) \cdot \mathrm{div}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial t_h}(\Phi_t^{-1}(y))\right)\right] dy$$

Per scambiare l'ordine di integrazione, si assume o $F \in C^2(I \times \mathbf{R}^m)$, o, ferme restando le altre assunzioni, permettendo meno regolarità nel parametro t, solo (cfr. primo criterio di Schwraz FT 12):

$\dfrac{\partial\Phi_t(x)}{\partial t} = \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)$, $J\Phi_t(x) = J_xF(t,x)$ siano $C(I \times \mathbf{R}^M)$, e quest'ultima $C^1(I)$, con derivata in t anch'essa continua in (t,x): $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_j}(t,x) \in C(I \times \mathbf{R}^M)$.

Perturbazioni dell'identità: (cfr. differenziale del determinante in FT 12) particolarmente significativo è il caso particolare in cui $I \subseteq \mathbf{R}$, è un intervallo e

$$\Phi_t \sim Id_{\mathbf{R}^m}, \text{ quando } t \sim t_0 \in I.$$

Per esempio, ferme le assunzioni fatte su F, $I = (-r;r)$, per ogni $x \in \mathbf{R}^m$ anche $t \mapsto F(t,x)$ sia $C^1(I)$, e $F(0,x) = \Phi_0(x) = x$, per cui:

$$F(0,x) = \Phi_0(x) = x, \text{ quindi } J\Phi_0(x) = J_x F(0,x) = Id_{m\times m}.$$

Posto $(v_1(x), \ldots, v_m(x)) = v(x) =: \dfrac{\partial F}{\partial t}(0,x)$, sviluppando in t: $\quad \Phi_t(x) = x + tv(x) + o_x(t)$.

$\dfrac{d\mathcal{F}}{dt}(0) = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{\partial f}{\partial v(x)}(x) + f(x)\cdot \operatorname{div} v(x)\right] dx.$ $\quad$ Se $f \equiv 1$: $\dfrac{d}{dt}\left(m_N(\Omega_t)\right)_{t=0} = \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} v(x) dx$.

<u>Osservazione:</u> il teorema della divergenza, cfr. FT 24, permette ulteriori sviluppi di tali formule.

III: integrazione non orientata su superficie

III.1: il caso "finito".

In FT 11, si è mostrato che $\sqrt{\det{}^tLL}$ (L, matrice $m \times M$, $m \geq M$, di *rango massimo* M)si interpreta come volume M-dimensionale del parellelpipedo generato dalle colonne di L.

Parallelepipedi M-dimensionali in $\mathbf{R}^m$: siano $L^1, \ldots, L^M \in \mathbf{R}^m$, $m \geq M$, linearmente indipendenti, $L = (L^1 | \ldots | L^M)$, $p \in \mathbf{R}^m$.

- Si *definisce* il volume o area M-dimensionale $\qquad s_M(P) = \sqrt{\det{}^tLL}$,

del parallelepipedo M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$ $P = p + L[0;1]^M = \{p + s_1L^1 + \cdots + s_ML^M : \; 0 \leq s_i \leq 1\}$, generato dagli spigoli $L^1, \ldots, L^M$, e vertici $p, p+L^1, \ldots, p+L^M, p+L^1+L^2, \ldots, p+L^1+\cdots+L^M$.

- Data $f : P(L) \to \overline{\mathbf{R}}$ per cui $x \mapsto f(p + Lx)$ sia misurabile, non negativa o integrabile, si *definisce*:

$$\int_P f ds_M = \sqrt{\det{}^tLL}\int_{[0;1]^M} f(p + Lx)\,dx, \quad \underline{ds_M = \sqrt{\det{}^tLL}\;dx}.$$

- Nel caso $L^1, \ldots L^M$ siano dipendenti il parallelogramma sarà degenere (di dimensione minore di M), e le stesse fomule saranno corrette annullandosi $\det{}^tLL$.

Parallelogrammi bidimensionali in $\mathbf{R}^3$: in questo caso (cfr. FT 11) l'area del parallelogramma P, eventualmente degenere, di vertici p, $p + \vec{A}$, $p + \vec{B}$, $p + \vec{A} + \vec{B}$ nello spazio $\mathbf{R}^3$,

$s_2(P) = \sqrt{\det{}^t(A|B)(AB)} = |A \times B|_{\mathbf{R}^3} = \sqrt{\text{somma quadrati aree proi. ort. sui piani coor. }}$.

<u>Osservazione:</u> - *l'invarianza per traslazione* è contenuta nella definizione.

- Per una trasformazione lineare in $\mathbf{R}^m$ associata alla matrice S, che trasforma parallelepipedi in parellelpipedi, si ha, comprendendo i casi degeneri, $s_M(SP(L)) = \sqrt{\det{}^tL{}^tSSL}$.

- Ne segue *l'invarianza* rispetto alle trasformazioni ortogonali, *riflessioni e rotazioni*.

- Rispetto ad *omotetie* S di fattore $\lambda \in \mathbf{R}$, $S = \lambda Id_{m\times m}$, si avrà $\quad s_M(SP) = |\lambda|^M s_M(P)$.

Unioni numerabili quasi disgiunte, poliedri: - le definizoni si estendono mediante serie ad unioni numerabili di M-parallelepipedi con interni relativi alla loro giacitura disgiunti.

- In particolare a poliedri M-dimensionali in $\mathbf{R}^m$.

III.2: il caso "infinitesimo".

Le idee intuitive sono analoghe a quelle qui già esposte riguardo ai volume di immagini.

1) si suddivide il *codominio* (sostegno di una superficie M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$) con *i trasformati* $\Phi(p + Q_x)$ *dei traslati in* p *degli ipercubi coordinati* Q_x *di spigoli infinitesimi* $he_i^{\mathbf{R}^M} \sim dx_ie_i^{\mathbf{R}^M}$;

2) - le presunte "aree M-dimensionali" dei $\Phi(p + Q_x)$ vengono a loro volta approssimate dalle aree M-dimensionali, or ora definite, degli *M-parallelepipedi tangenti*, con vertice in $\Phi(p)$ e spigoli generatori $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}(p)h, \ldots, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_M}(p)h$: $\;\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}(p)dx_i = J\Phi(p)dx_ie_i^{\mathbf{R}^M} \in \mathbf{R}^m$,

ovvero i traslati in $\Phi(p)$ dei trasformati di Q_x mediante lo jacobiano in p di Φ:

$J\Phi(p)Q_x = J\Phi(p)\begin{pmatrix} dx_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & dx_M \end{pmatrix}[0;1]^M$. Per definizone le aree M-dimensionali sono

$$\sqrt{\det\left[\begin{pmatrix} dx_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & dx_M \end{pmatrix} {}^tJ\Phi(p)J\Phi(p)\begin{pmatrix} dx_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & dx_M \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{\det{}^tJ\Phi(p)J\Phi(p)}|dx_1 \ldots dx_M|.$$

Analogamente al caso finito si otterrebbe: $\qquad ds_M \sim \sqrt{\det{}^tJ\Phi(p)J\Phi(p)}dx.$

Si definiscono quindi:

M-jacobiano se $\Phi : E \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, è differenziabile in p, se $M \leq m$, $\sqrt{\det {}^tJ\Phi(p)J\Phi(p)}$ si dice M *jacobiano* e si indica con $|J|_M\Phi(p)$. $(ds_M = |J|_M\Phi(x)\,dx)$

Parametrizzazioni ammissibili per l'integrazione non orientata. Si dirà *parametrizzazione ammissibile per l'integrazione non orientata* M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$ una $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, *localmente Lipschitziana*, Ω aperto, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m_M\big(\overline{\Omega} \setminus A\big) = 0$, ed *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$.

Area ed integrali non orientati di superficie: sia $\Phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ ammissibile

- **Area:** per ogni F per cui $\Phi^{-1}(F) \setminus C_\Phi$ sia misurabile, per ogni E per cui $E \cap \overline{\Omega} \setminus C_\Phi$ sia misurabile, si definisce: $s_M\big(F\big) =: \displaystyle\int_{A\cap\Phi^{-1}(F)} |J|_M\Phi(x)\,dx, \quad s_M\big(\Phi(E)\big) = \int_{A\cap E} |J|_M\Phi(x)\,dx.$

- **Integrale non orientato:** per ogni f definita su $\Phi(\overline{\Omega})$, per cui $f{}_o\Phi|J|_M\Phi(x)|$ sia misurabile, o non negativa o anche integrabile, si definisce $\displaystyle\int_{\Phi(\overline{\Omega})} f\,ds_M \;=: \int_A f(\Phi(x))|J|_M\Phi(x)\,dx.$

- **Molteplicità:** ferme le altre assunzioni, senza ipotesi di iniettività su Φ, per ogni $f : \Phi(\overline{\Omega}) \to \overline{\mathbf{R}}$, con $f{}_o\Phi|J|_M\Phi$ misurabile, o non negativa o anche integrabile, si ottiene

$$\int_\Phi f\#\left(\Phi^{-1}\right)\,ds_M = \int_{\Phi(\overline{\Omega})} f(y)\#\left(\Phi^{-1}\{y\}\right)\,ds_M(y) \;=\; \int_A f\big(\Phi(x)\big)|J|_M\Phi(x)\,dx,$$

Caso bidimensionale in $\mathbf{R}^3$. Nel caso bidimensionale in $\mathbf{R}^3$, queste nozioni e notazioni si possono specializzare come segue.

Si usa la seguente notazione $(x_1, x_2) = (u, v)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$$ds_2 = \sqrt{\det{}^tJ\Phi J\Phi}dudv = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle\partial_u\Phi\cdot\partial_u\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle\partial_u\Phi\cdot\partial_v\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3} \\ \langle\partial_v\Phi\cdot\partial_u\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle\partial_v\Phi\cdot\partial_v\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3}\end{pmatrix}}dudv = \text{Cauchy-Binet}$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix}\partial_u\Phi_1 & \partial_v\Phi_1 \\ \partial_u\Phi_2 & \partial_v\Phi_2\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}\partial_u\Phi_2 & \partial_v\Phi_2 \\ \partial_u\Phi_3 & \partial_v\Phi_3\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}\partial_u\Phi_3 & \partial_v\Phi_3 \\ \partial_u\Phi_1 & \partial_v\Phi_1\end{pmatrix}^2}dudv =$$

$$= \left|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|_{\mathbf{R}^3} dudv.$$

Considerando formalmente la regola della catena usando la notazione $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, si ottiene $\begin{cases} dx = & \partial_u\Phi_1 du + \partial_v\Phi_1 dv \\ dy = & \partial_u\Phi_2 du + \partial_v\Phi_2 dv \\ dx = & \partial_u\Phi_3 du + \partial_v\Phi_3 dv\end{cases}$, utilizzando la terza uguaglianza

$$ds_2^2 \;=\; |dx \times dy|^2 \;+\; |dy \times dz|^2 \;+\; |dz \times dx|^2, \quad |J|_2\Phi = |\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi|_{\mathbf{R}^3}.$$

Caso di grafici di funzioni reali: se $\Phi(x) = (x, \phi(x))$, $\phi : \overline{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}$, $M = m-1$, è la funzione che parametrizza il grafico di ϕ, si ha $J\Phi = \begin{pmatrix} Id_{(m-1)\times(m-1)} \\ J\phi\end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} Id_{(m-1)\times(m-1)} \\ \partial_{x_1}\phi\ldots\partial_{x_{m-1}}\phi\end{pmatrix}$, pertanto $\det{}^tJ\Phi J\Phi = \det\begin{pmatrix} Id_{(m-1)\times(m-1)} & \begin{matrix}\partial_{x_1}\phi \\ \vdots \\ \partial_{x_{m-1}}\phi\end{matrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id_{(m-1)\times(m-1)} \\ \partial_{x_1}\phi\ldots\partial_{x_{m-1}}\phi\end{pmatrix} =$

Cauchy- Binet

$$= \left[\det\begin{pmatrix} 0_{(m-2)\times 1} & e_1^{\mathbf{R}^{m-2}}\ldots & e_{m-2}^{\mathbf{R}^{m-2}} \\ \partial_{x_1}\phi & \partial_{x_2}\phi\ldots & \partial_{x_{m-1}}\phi\end{pmatrix}\right]^2 + \cdots + \left[\det\begin{pmatrix} e_1^{\mathbf{R}^{m-2}} & \ldots e_{m-2}^{\mathbf{R}^{m-2}} & 0_{(m-2)\times 1} \\ \partial_{x_1}\phi & \ldots\partial_{x_{m-2}}\phi & \partial_{x_{m-1}}\phi\end{pmatrix}\right]^2 + 1 =$$

$=$ sviluppando per colonne $|\nabla\phi|^2_{\mathbf{R}^{m-1}} + 1$. Quindi $ds_{m-1} = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2_{\mathbf{R}^{m-1}}}dx.$

Luoghi di zeri: data $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, C^1, per cui $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, su $S = \{(x, y, z) : F(x, y, x) = 0\}$. Per il teorema delle funzioni implicite S è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbf{R}^3$, in quanto unione di grafici disgiunti di funzioni nelle variabili (x, y). Se ϕ è una tali funzioni $\partial_x \phi(x, y) = -\dfrac{\partial_x F(x, y, \phi)}{\partial_z F(x, y, \phi)}$, $\partial_y \phi(x, y) = -\dfrac{\partial_y F(x, y, \phi)}{\partial_z F(x, y, \phi)}$.
Quindi tale Grafϕ, componente di S, è il sostegno della superficie parametrica regolare semplice $\Phi(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$, $(x, y) \in \mathrm{Dom}\phi$, per cui

$$ds_2 = \sqrt{1 + |\nabla\phi(x, y)|^2}\, dx\, dy = \frac{|\nabla F(x, y, \phi)|_{\mathbf{R}^3}}{|\partial_z F(x, y, \phi)|}\, dx\, dy,\ (x, y) \in \mathrm{Dom}\phi.$$

Non essendoci nel caso non lineare una parametrizzazione standard, come per i parallelepipedi, dal punto di vista geometrico è necessario mostrare che questa nozione di area è indipendente dalla parametrizazzione, ma dipende nel caso di essenziale iniettività solo dal sostegno.
Indipendenza dalla parametrizzazione: siano $\Phi : \overline{D} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ e $\Psi : \overline{\Delta} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $M \leq m$, parametrizzazioni ammissibili (essenzialmente iniettive).

Equivalenza forte: esse si dicono equivalenti (in senso forte) se vi è $\Gamma : \overline{\Delta} \to \overline{D}$, diffeomorfismo C^1, invertibile con inversa C^1, per cui $\Psi = \Phi_o\Gamma$, $\Phi = \Psi_o\Gamma^{-1}$.

Se Φ e Ψ sono equivalenti allora $$\int\limits_{\Phi} f\, ds_M = \int\limits_{\Psi} f\, ds_M.$$

per $m = 3$, $M = 2$ si dà un calcolo alternativo a quello proposto nella dimostrazione in FT22:

$\Psi = \Psi(p, q)$, $\Phi = \Phi(u, v)$, $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2) = (u, v)$: $\begin{cases} \partial_p\Psi = & \partial_u\Phi\partial_p\Gamma_1 + \partial_v\Phi\partial_p\Gamma_2 \\ \\ \partial_q\Psi = & \partial_u\Phi\partial_q\Gamma_1 + \partial_v\Phi\partial_q\Gamma_2 \end{cases}$,

$\partial_p\Psi \times \partial_q\Psi = \partial_u\Phi \times \partial_v\Phi\, [\partial_p\Gamma_1\partial_q\Gamma_2 - \partial_p\Gamma_2\partial_q\Gamma_1] = \partial_u\Phi \times \partial_v\Phi\, \det J\Gamma$, quindi

$$\int\limits_{\Psi} f ds_2 = \int\limits_{\Delta} f(\Psi(p, q))|\partial_p\Psi(p, q) \times \partial_q\Psi(p, q)|_{\mathbf{R}^3} dpdq =$$

$$= \int\limits_{\Delta} f(\Phi(\Gamma(p, q)))|\partial_u\Phi(\Gamma(p, q)) \times \partial_v\Phi(\Gamma(p, q))|\, |\det J\Gamma(p, q)| dpdq =$$

$$= \int\limits_{D} f(\Phi(u, v))|\partial_u\Phi(u, v) \times \partial_v\Phi(u, v)|\, dudv = \int\limits_{\Phi} f\, ds_2.$$

Osservazione: - analogamente, senza ipotesi di iniettività, nel caso di equivalenza, si avrà l'eguaglianza degli integrali con molteplicità.
- Se Γ è solo un cambiamento di coordinate ammissibile si ottengono analoghi risulati.
• Esercizio: studiare la relazione tra gli integrali per due parametrizzazioni ammissibili Ψ e Φ con $\Psi = \Phi_o\Gamma$, ma Γ una trasformazione ammissibile senza alcuna assunzione di iniettività.

È quindi ben posta la seguente definizione:
Integrali non orientati su sottovarietà: assumendo che una Σ sottovarietà M-dimensionale C^K, $K \geq 1$ di $\mathbf{R}^m$, sia unione numerabile di sostegni S_n, $n \in \mathbf{N}$ di carte locali, per cui $s_M(S_n \cap S_m) = 0$, $n \neq m$ si pone, per integrande f per cui gli integrali *siano definiti*, e che siano funzioni *o di segno costante*, o per cui $\sum \int_{S_n} f^+ < +\infty$, o $\sum \int_{S_n} f^- < +\infty$:

$$\int\limits_{\Sigma} f\, ds_M = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{S_n} f\, ds_M.$$

Prima forma fondamentale: - ha particolare interesse, nel caso di superficie parametrica Φ bidimensionale nello spazio cartesiano tridimensionale $M=2,\ m=3$, il ruolo della matrice ${}^tJ\Phi\, J\Phi$, 2×2, il cui determinante jacobiano dà il quadrato il fattore di riscalamento per l'area.
- Piuttosto che come matrice associata ad una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sè, la si considera come matrice simmetrica associata ad una *forma bilineare* simmetrica da $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$.
- Si usa ancora la notazione $(x_1,x_2)=(u,v)$, $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.

$$\mathbb{I}_\Phi(u,v)=:\ {}^tJ\Phi J\Phi=\begin{pmatrix}\langle\partial_u\Phi\cdot\partial_u\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle\partial_u\Phi\cdot\partial_v\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3}\\ \langle\partial_v\Phi\cdot\partial_u\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle\partial_v\Phi\cdot\partial_v\Phi\rangle_{\mathbf{R}^3}\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$$

- - Per prima cosa si osserva che $\mathbb{I}$ è *simmetrica*,
- - poichè $\left\langle \mathbb{I}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbf{R}^2}=\left\langle {}^tJ\Phi J\Phi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbf{R}^2}=\left\langle J\Phi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot J\Phi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbf{R}^3}\geq 0,$

è *semidefinita positiva*, anzi a meno di un insieme di misura nulla di parametri (u,v), dà un *prodotto scalare* in $\mathbf{R}^2$. La *forma quadratica* ad esso associata, denotata ancora con $\mathbb{I}$, si dice:

prima forma fondamentale della superficie.

- Come visto la radice quadrata del determinante di $\mathbb{I}$ dà il rapporto tra l'elemento d'area della superficie in $\mathbf{R}^3$ e quello in $\mathbf{R}^2$ dei parametri: $\quad ds_2\ =$

$$=\sqrt{|dx\times dy|^2+|dy\times dz|^2+|dz\times dx|^2}=|\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi|_{\mathbf{R}^3}\,du\,dv=|J|_2\Phi\,du\,dv=\det{}^tJ\Phi\,J\Phi\,du\,dv=$$

$$=\sqrt{\det\mathbb{I}}\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

- La prima forma fondamentale permette anche di esprimere *l'elemento di lunghezza in* $\mathbf{R}^3$ *di curve sulla superficie*, con le velocità delle curve in $\mathbf{R}^2$ ottenute rimontando le prime nello spazio dei parametri con Φ^{-1}:

$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))=\Phi(u(t),v(t))=\Phi(\widetilde{\gamma}(t)),\quad \widetilde{\gamma}(t)=(u(t),v(t))\ ,\quad \gamma'(t)=J\Phi(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)$:

$$ds_1=|\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}\,dt=|J\Phi(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)|_{\mathbf{R}^3}\,dt=\sqrt{\langle J\Phi(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)\cdot J\Phi(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)\rangle_{\mathbf{R}^3}}\,dt=$$

$$=\sqrt{\langle({}^tJ\Phi\,J\Phi)(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)\cdot\widetilde{\gamma}'(t)\rangle_{\mathbf{R}^2}}\,dt=\text{omettendo il punto ove si calcola }\mathbb{I}$$

$$=\sqrt{\langle\mathbb{I}\widetilde{\gamma}'(t)\cdot\widetilde{\gamma}'(t)\rangle_{\mathbf{R}^2}}\,dt\ =\ \sqrt{(u',v')\,\mathbb{I}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}}dt=\sqrt{\mathbb{I}(u',v')}dt=$$

$$=\sqrt{Eu'^2+Gv'^2+2Fu'v'}\,dt.\quad \text{Pertanto:}\quad \int_\gamma f\,ds_1\ =\ \int f(\Phi(u,v))\sqrt{\mathbb{I}(u',v')}\,dt.$$

<ins>Osservazione:</ins> si è usato il fatto, di immediata verifica, che data una A matrice $m\times M$, $M\leq m$, si ha per ogni $U,\ V\in\mathbf{R}^M$: $\langle AU\cdot AV\rangle_{\mathbf{R}^m}=\langle{}^tAAU\cdot V\rangle_{\mathbf{R}^M}$: omettendo nei singoli termini delle eguaglianze le sommatorie degli indici ripetuti

$$(AU)_i(AV)_i=A_i^jU_jA_i^hV_h=A_i^hA_i^jU_JV_h=({}^tA)_h^iA_i^jU^jV_h=[({}^tAA)U]_hV_h.$$

Si esaminano alcuni esempi rigurdanti superficie di rotazione e di cono:
Area sfera: $\Phi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $\Phi(\phi,\theta)=(R\cos\theta\cos\phi,R\cos\theta\sin\phi,R\sin\theta)$,
$\overline{\Omega}=[-\pi;\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ A=\Omega=(-\pi;\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi(\overline{\Omega})=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2\}$,

$$J\Phi(\phi,\theta)=R\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix},\ |J|_2\Phi(\phi,\theta)=R^2\cos\theta,\ C_\Phi\cap A=\emptyset:$$

$$s_2\left(\Phi\left(\overline{\Omega}\right)\right)=\int_\Omega R^2\cos\theta\,d\phi\,d\theta=2\pi R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=4\pi R^2.$$

Area toro: siano $R > \rho > 0$, $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,

$$\Phi(\phi,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho\cos\gamma \\ 0 \\ \rho\sin\gamma \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} R\cos\phi + \rho\cos\gamma\cos\phi \\ R\sin\phi + \rho\cos\gamma\sin\phi \\ \rho\sin\gamma \end{pmatrix},$$

$\overline{\Omega} = [-\pi;\pi]\times[0;2\pi]$, $A = \Omega = (-\pi;\pi)\times(0;2\pi)$, $\Phi(\overline{\Omega}) = \{(x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = \rho^2\}$,

$$J\Phi(\phi,\gamma) = \begin{pmatrix} -R\cos\phi - \rho\cos\gamma\sin\phi & -\rho\sin\gamma\cos\phi \\ R\cos\phi + \rho\cos\gamma\cos\phi & -\rho\sin\gamma\sin\phi \\ 0 & \rho\cos\gamma \end{pmatrix},\ |J|_2\Phi(\phi,\gamma) = \cdots = R\rho + \rho^2\cos\gamma:$$

$$s_2\left(\Phi\left(\overline{\Omega}\right)\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi} (R\rho + \rho^2\cos\gamma)\, d\phi\, d\gamma = 2\pi\int_0^{2\pi} (R\rho + \rho^2\cos\gamma)\, d\gamma = 4\pi^2 R\rho$$

Superficie di rotazione: *Guldino-Pappo 2.0.* Sia $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $t \in I$, $x(t) \geq 0$, regolare a tratti, iniettiva al di fuori di un insieme di misura nulla. La superfice di rotazione Φ, ottenuta ruotando $\mathrm{Im}\gamma$ attorno all'asse delle z di $\alpha \leq 2\pi$ radianti: $(t,\phi) \in I \times [0;\alpha]$ è data da

$$\Phi(\phi,t) = (x(t)\cos\phi, x(t)\sin\phi, z(t)) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = R(\phi)\gamma(t).$$

$|J|_2\Phi(t,\phi) = \sqrt{(x'x)^2 + (xz'\cos\phi)^2 + (xz'\sin\phi)^2} = x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}$, si ha

$$\int_\Phi f\, ds_2 \ = \ \int_0^\alpha \left(\int_\gamma x f\left(R(\phi)^t(x,0,z)\right)\, ds_1 \right) d\phi.$$

Guldino-Pappo 2.1: il baricentro del sostegno di γ avrà prima coordinata uguale a $\dfrac{1}{\ell(\gamma)}\displaystyle\int_\gamma x\, ds_1$.

Quindi l'area della superficie di rotazione, ottenuta ruotando di α radianti una curva, contenuta in un semipiano determinato dall'asse di rotazione, è data da:

lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro della curva $\cdot$ lunghezza della curva $=$
$= \alpha\cdot$ distanza del baricentro della curva dall'asse $\cdot$ lunghezza della curva

Superficie di cono: sia $\gamma(t) = (x(t), y(x), z(t))$, $t \in I$ curva semplice regolare a tratti. Per semplicità si assume che: non passi per l'origine, e $\gamma \mapsto \frac{\gamma}{|\gamma|}$ sia iniettiva nella sfera unitaria. L'insieme $\{(x,y,z) :\ (x,y,z) = r\gamma(t),\ r \in [0;1],\ t \in I\}$ è il sostegno della superficie parametrica $\Phi(r,t) = (rx(t), ry(x), rz(t))$, $(r,t) \in [0;1]\times I$, c iniettiva su $[0;1]\times I^o$. Sia S il suo sostegno.

Poichè $J\Phi(r,t) = \begin{pmatrix} x(t) & rx'(t) \\ y(t) & ry'(t) \\ z(t) & rz'(t) \end{pmatrix} \ = \ r\left(\gamma(t)|\gamma'(t)\right)$, si ha $ds_2 = r|\gamma(t)\times\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}\, dr\, dt$,

$$s_2(S) = \int_{[0;1]\times I} r|\gamma(t)\times\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}\, dr\, dt = \int_0^1 r \left(\int_I |\gamma(t)\times\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}\, dt \right) dr = \frac{1}{2}\int_I |\gamma(t)\times\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}\, dt.$$

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Riduzione:

[FS] integrali doppi su domini normali pagg. 201-214, integrali tripli su domini normali pagg. 234-236;

[B] integrali doppi pagg. 461-477, (determinante 479), integrali tripli pagg. 487- 492, esercizi (anche per combaimento di variabili e integrali di superficie) 495-513;

[F] integrali doppi e tripli su domini normali (371) 380-382, 386-390, 408-411, integrali in piu' variabili e funzioni continue pagg. 428-430, 438-442, un approccio diverso alla teoria di Lebesgue pagg. (450) 464-467, 468, 471, 474, 475-478,, 481-489, 490-493, 495, 496, '497, 501, 502-506, 508-514.

Cambio di variabile:

[FS] cambiamenti di variabile pagg. 224-233, 237-241, integrali su superficie pagg. 252-259;

[B] pagg. 262-264, 477-486, 492-508, 529, 536-540, 540-542, 557-560;

[F] pagg. 400-408, 411-414, 440-442, 444-448, 515-530, 557-560, 565-573, 579-581.

Integrali su superficie:

[FS] pagg. 252-259, 224-226;

[B] pagg. 485-486, 536-540, 557-560;

[F] pagg.565-573, 579-581.