Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 23
CAMPI CONSERVATIVI, INTEGRABILI (esatti) E CHIUSI

Campi di vettori: un *campo di vettori* v su $E \subseteq \mathbf{R}^n$, si *identifica* con $v : E \to \mathbf{R}^n$ continua.
Notazione: la notazione delle forme differenziali:
$(a(x,y)dx + b(x,y)dy$; $a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$; $a_1(x)dx_1 + \dots a_N(x)dx_N$ corrispondono rispettivamente ai campi di vettori
$(a(x,y), b(x,y))$; $(a(x,y,z), b(x,y,z); c(x,y,z))$; $(a_1(x_1,\dots,x_N),\dots,a_N(x_1,\dots,x_N))$.

Campi conservativi: un campo v si dice *conservativo* su E se per ogni cammino (C^1 a tratti) *chiuso* a valori in E si ha $\displaystyle\int_\gamma v = 0$, ovvero il *lavoro* di v lungo una traiettoria *chiusa* è *nullo*.

Campi esatti: un campo v si dice *esatto (o integrabile)* su A (aperto), se vi è una funzione C^1 in A per cui $v(x) = \nabla f(x)$. Tale funzione si dice *primitiva* di v su A.

Campi localmente esatti: un campo si dice *localmente esatto* su A (aperto), se per ogni $x \in A$ vi è un intorno U di x per cui il campo è esatto su $A \cap U$.

Campi chiusi: un campo si dice *chiuso* su A se è C^1 su A $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$ per $1 \le i,\ j \le n$.

Rotore: dato $v = v(x,y,z)$ campo C^1 in $A \subseteq \mathbf{R}^3$ si dice *rotore* di v il campo:

$$\mathrm{rot}v \;=\; \nabla \times v \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Teorema 0: $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso, $f : A \to \mathbf{R}$ con derivate parziali prime nulle allora f è costante su A. *Dim.*: cfr. FT5, FT12.

Corollario 0: se v è esatto su A_1, e su A_2, e $A_1 \cap A_2$ è connesso allora v è esatto su $A_1 \cup A_2$. *Dimostrazione:* su $A_1 \subset A$ il campo v ha una primitiva f_1, e su $A_2 \subset A$ ha una primitiva f_2, e $A_1 \cap A_2$ è connesso, allora per il teorema 0, avendo lo stesso differenziale f_1 ed f_2 ivi differiscono per una costante: $f_1 = f_2 + c$ su $A_1 \cap A_2$. Ma allora la funzione che vale f_1 su A_1 ed $f_2 + c$ su A_2 è una primitiva di v su $A_1 \cup A_2$.

Proposizione 1: Per ogni campo v su $E \subseteq \mathbf{R}^n$ e per ogni cammino γ regolare a tratti da $[a;b]$ a valori in E si ha: $\displaystyle\left|\int_\gamma v\right| \;\le\; \max_{x\in[\gamma]} |v(x)|_{\mathbf{R}^n} \int_a^b |\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^n}\,dt.$. *Dim.*: cfr. FT4, FT7.

Teorema 1: Sia A aperto di $\mathbf{R}^n$, e v campo su A. 1- Sono equivalenti
i) v è esatto su A, ii) v è conservativo,
iii) il lavoro di v su un cammino C^1 a tratti in A dipende solo dagli estremi del cammino.

2- Nel caso, una primitiva su una componente connessa B di A è data, fissando $x_B \in B$, da:

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_B,x}} v\ , \quad x \in B,$$

essendo $\gamma_{x_B,x}$ un qualsiasi cammino (in B) congiungente x_B ad x.

Dimostrazione: 1- $iii) \Leftrightarrow ii)$: se $\sigma : [a;b] \to A$ è un cammino chiuso $\gamma(a) = \gamma(b)$, e $c \in (a;b)$ allora $\sigma : [a;c] \to A$ $\sigma(t) = \gamma(t)$, e $\varphi : [c;b] \to A$, $\varphi(t) = \gamma(c+b-t)$, sono cammini con gli stessi estremi. Ma $\gamma = \sigma \ominus \varphi$ per cui $\displaystyle\int_\gamma v = \int_\sigma v - \int_\varphi v = 0$. Il viceversa è analogo.
$i) \Rightarrow iii)$: se $v(x) = \nabla f(x)$, $\gamma : [a;b] \to A$, si ha
$\displaystyle\int_\gamma v = \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(f(\gamma(t)) \right) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.
2- e $iii) \Rightarrow i)$: viceversa se $B \subseteq A$ è aperto connesso e $x_B \in B$ per iii) è ben definita per $x \in B$ la funzione $f(x) = \displaystyle\int_{\gamma_{x_B,x}} v$
qualsiasi sia $\gamma = \gamma_{x_B,x}$ cammino in B congiungente x_B ad x. Sia $r > 0$ per cui $B(x,r) \subseteq B$ e sia $h \in \mathbf{R}^n$ con $0 < |h|_n < r$, e si consideri il segmento parametrico da x a $x+h$, $\sigma(t) = x + th$, $0 \le t \le 1$. Un cammino del tipo $\gamma \oplus \sigma$ è contenuto in B, e si ha

$$f(x+h) - f(x) - \langle v(x) \cdot h \rangle = \int_{\gamma\oplus\sigma} v - \int_\gamma v - \langle v(x) \cdot h \rangle = \int_\gamma v + \int_\sigma v - \int_\gamma v - \langle v(x) \cdot h \rangle =$$

$$\int_\sigma v - \langle v(x) \cdot h \rangle = \int_0^1 \langle v(x+th) \cdot h \rangle dt - \langle v(x) \cdot h \rangle = \left\langle \int_0^1 \left(v(x+th) - v(x) \right) dt \cdot h \right\rangle$$

dividendo per $|h|_n > 0$, poichè $\dfrac{h}{|h|}$ è limitato, e poichè v continuo passando al limite sotto segno di integrale, si ha che l'ultimo termine è $o(|h|)$ per $h \to 0$, che letto sul primo termine è la definizione che il differenziale di f è dato da $\langle v(x) \cdot h \rangle$, cioè $\nabla f(x) = v(x)$.

Teorema 2 Un campo C^1 su A aperto conservativo è chiuso su A.
Dimostrazione: essendo v esatto basta usare il teorema di Schwarz per le derivate parziali seconde di una sua primitiva su A.

Esempio 1: L'esempio tipico di campo chiuso non esatto su un aperto è

$$S(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \; \frac{x}{x^2+y^2} \right) \;,\quad (x,y) \in A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

- È chiuso in A poichè su $\mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\}$ è il differenziale di $\text{artan}\frac{y}{x}$, mentre su $\mathbf{R}^2 \setminus \{y = 0\}$ è il differenziale di $-\text{artan}\frac{x}{y}$.
- Non è esatto in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, infatti *"conta" gli angoli* che un cammino fa attorno all'origine: con $\gamma : [0;2k\pi] \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$:

$$\int_\gamma S = \int_0^{2k\pi} \left[(-\sin\theta)(-\sin\theta) + (\cos\Theta)(\cos\theta) \right] d\theta = 2k\pi.$$

Altro modo di vedere: non è esatto in A, infatti se fosse $S = \nabla f$, le $f(x,-1)$ ed $f(1,y)$ sarebbero crescenti, e quindi $f(-1,-1) < f(1,-1) < f(1,1)$, d'altronde $f(x,1)$ ed $f(-1,y)$ sarebbero decrescenti ottenendo $f(-1,-1) > f(-1,1) > f(1,1)$.
Si noti che su sottodomini che non contengono semirette con vertice l'origine il campo è esatto, per esempio sul dominio privo del semiasse non negativo delle ascisse una primitiva è data dall'argomento $0 < \theta(x,y) < 2\pi$ per cui $(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta, \sin\theta)$. Si nota che S ha integrale nullo lungo i segmenti radiali dall'origine, per cui $\theta(x,y)$ è l'integrale di S lungo il cammino dato dalla giustapposizione dall'arco di circonferenza che congiunge $(1,0)$ al versore di (x,y) con il segmento radiale che congiunge il versore a (x,y). In particolare nel primo quadrante un primitiva è $\text{artan}\frac{y}{x}$.

Stellati e coni: - un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice *stellato rispetto a un suo punto* $x_0 \in A$ se contiene tutti i segmenti con un estremo in x_0 e l'altro in un altro punto di A: se $x \in A$ e $0 \le t \le 1$ allora $x_0 + t(x - x_0) \in A$.

- un insieme $E \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice *cono positivo con vertice* in $x_0 \in \mathbf{R}^n$, eventualmente $x_0 \notin E$, se contiene tutte le semirette, aperte, con vertice in x_0 e passanti oper ogni altro punto di E: per $x \in E$ e $t > 0$ si ha $x_0 + t(x - x_0) \in E$.

Teorema 3:(Lemma di Poincaré elementare) Sia A aperto stellato di $\mathbf{R}^n$, e v un campo chiuso su A (quindi C^1 su A). Allora v è integrabile su A.

Dimostrazione: dato $x \in A$ il segmento parametrico $\sigma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ di estremi x_0 e x è contenuto in A. La primitiva cercata è

$$f(x) \;=\; \int_\sigma v \;=\; \int_0^1 \langle v(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)\rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n v_i(x_0 + t(x - x_0))(x^i - x_0^i)\, dt.$$

Per comodità si pone $x_0 = 0_{\mathbf{R}^n}$. Derivando rispetto a x^j

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial v_i}{\partial x^j}(tx) \cdot t \cdot x^i\right] dt \;+\; \int_0^1 v_j(tx)\, dt = \text{essendo } v \text{ chiuso}$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial v_j}{\partial x^i}(tx) \cdot t \cdot x^i\right] dt \;+\; \int_0^1 v_j(tx)\, dt = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}(tx) \cdot t \cdot x^i\right) + v_j(tx)\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} t v_j(tx)\right) dt \;=\; v_j(x).$$

Per il teorema del differenziale totale quindi f è differenziabile con gradiente v.

Corollario 1: Se $A = \overset{\circ}{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, e v è C^1 allora $\underline{v \text{ chiuso se e solo se localmente integrabile}}$.

<u>Osservazione:</u> si può in effetti provare con dimostrazione più raffinata:

Teorema 3bis: Se v è localmente esatto, non necessariamente C^1, su un aperto A stellato allora è esatta su tutto A.

<u>Osservazione:</u> con dimostrazione diretta come per il lemma di Poncaré, usando il teorema di Eulero si ha:

Teorema 3ter: Se A è un cono aperto con vertice (per semplicità) in $0_{\mathbf{R^n}}$, $p \neq -1$, v campo $C^1(A)$ che sia p-positivamente omogeneo, allora è chiuso se e solo se è esatto. Una sua primitiva è data da
$$f(x) \;=\; \frac{1}{p+1}\langle x \cdot v(x)\rangle \;=\; \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^n x_i v_i(x).$$

<u>Osservazione:</u> *e.g.* il campo gravitazionale di un punto $v(x, y, z) \;=\; -KM\dfrac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$.

Nel seguito si danno i concetti di base che rispondono in modo soddisfaciente al problema dell'integrabilità di campi localmente esatti. Tali nozioni nel caso più restrittivo di campi C^1 chiusi e cammini C^2 a tratti, permettono delle dimostrazioni, riportate nell'ultimo paragrafo, usando le tecniche del calcolo differenziale.

Cammini omotopi con estremi fissi: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$ e siano P, $Q \in A$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini (C^1 a tratti) in A aventi come primo estremo P e come secondo estremo Q. Si dice che γ_0 e γ_1 sono *omotopi* in A con *estremi fissati* se esiste

$$\begin{array}{l} \Gamma(t,s)[0;1]\times[0;1]\to A \ , \quad \Gamma \text{ è continua} \ , \quad (t\mapsto\Gamma(t,s) \text{ è } C^1 \text{ a tratti}) \\ \Gamma(0,s)=P \ , \quad \Gamma(1,s)=Q \\ t\mapsto\Gamma(t,0)\sim\gamma_0 \ , \quad t\mapsto\Gamma(t,1)\sim\gamma_1 \end{array}$$

Una siffatta Γ si chiama *omotopia* ad estremi fissati in A tra γ_0 e γ_1.

Osservazione: La relazione di essere omotopi con estremi fissati è una relazione di equivalenza nelle famiglia dei cammini (C^1 a tratti) in A con estremi fissati P e Q.

Teorema 4: Sia v un campo localmente esatto in un aperto A di $\mathbf{R}^n$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini (C^1 a tratti) omotopi in A con estremi fissati. Allora $\displaystyle\int_{\gamma_0} v = \int_{\gamma_1} v.$

Dimostrazione: si dà la dimostrazione nell'ultimo paragrafo solo per campi chiusi, quindi C^1, e per cammini C^2 con omotopia C^2, per poter usare il calcolo differenziale.

Cammini chiusi omotopi: Siano γ_0 e γ_1 due cammini chiusi (C^1 a tratti) in A aperto di $\mathbf{R}^n$. Si dice γ_0 e γ_1 sono omotopi in A se esiste

$$\begin{array}{l} \Gamma(t,s):[0;1]\times[0;1]\to A \ , \quad \Gamma \text{ è continua} \ , \quad (t\mapsto\Gamma(t,s) \text{ è } C^1 \text{ a tratti}) \\ \Gamma(0,s)=\Gamma(1,s) \\ t\mapsto\Gamma(t,0)=\gamma_0 \ , \quad t\mapsto\Gamma(t,1)=\gamma_1 \end{array}$$

Una siffatta Γ si chiama *omotopia* di cammini chiusi in A tra γ_0 e γ_1.
La relazione di omotopia in A è una relazione di equivalenza tra cammini chiusi (C^1 a tratti).

Teorema 5 : Se due cammini chiusi γ_1, γ_0 sono omotopi in A e v è un campo localmente integrabile in A allora $\displaystyle\int_{\gamma_0} v = \int_{\gamma_1} v.$

Dimostrazione: come per il Teorema 4 la dimostrazione generale richiede altre tecniche e concetti. Si dà una dimostrazione nell'ultimo paragrafo solo per campi chiusi C^1, e per cammini chiusi C^2 con omotopia C^2, che è identica a quella del teorema 4 nelle analoghe ipotesi.

Semplicemente connessi : Un sottinsieme A di uno spazio metrico si dice *semplicemente connesso* se: è *connesso per archi*, e ogni cammino in A chiuso è *omotopo* (come cammino chiuso) *ad un cammino costante* (con sostegno un punto di A).

Questa nozione formalizza il fatto che A non abbia "buchi" per i quali alcune curve che ci girano attorno non possono "slacciarsi"; esempi minimali sono alcuni oggetti $(n-2)$-dimensionali : punti nel piano, sostegni di cammini semplici chiusi o illimitati in ambo i versi (per esempio rette nello spazio), etc. .
Osservazione: un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ *convesso* (se due punti gli appartengono allora contiene il segmento che li congiunge) è semplicemnete connesso. Infatti per prima cosa è connesso per archi (segmenti), quindi dati γ_0 e γ_1 definiti su $[0;1]$ a valori nel convesso l'omotopia *a valori nel convesso* è semplicemente: $\Gamma(t,s)=\gamma_s(t)=s\gamma_1(t)+(1-s)\gamma_0(t)$.

Teorema 6 : Se un aperto A è semplicemente connesso allora ogni forma localmente integrabile in A è esatta in A.

Dimostrazione: ancora la dimostrazione generale concerne altre tecniche.
- Per campi chiusi C^1 e per semplice connessione solo per omotopie C^2, una prima dimostrazione si ottiene nell'ultimo paragrafo ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 1 grazie a un'accortezza tecnica.

Dimostrazioni

Teorema 4: Sia v un campo localmente esatto in un aperto A di $\mathbf{R}^n$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini C^1 a tratti omotopi in A con estremi fissati. Allora

$$\int_{\gamma_0} v = \int_{\gamma_1} v.$$

Dimostrazione: si dà la dimostrazione solo per campi chiusi, quindi C^1, e per cammini C^2 con omotopia C^2, per poter usare il calcolo differenziale.
A meno di una riparametrizzazione regolare si può supporre che i due cammini siano entrambi definiti su $[0;1]$.

Se Γ è l'omotopia C^2 con estremi fissati tra di essi si osservi che

$$\frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(0,s) = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(1,s) = 0$$

Si può supporre $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ e $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$. Coerentemente si denoterà $\Gamma(t,s)$ con $\gamma_s(t)$.

Sia $\mathcal{L}(s) = \displaystyle\int_{\gamma_s} v = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt.$

Per i teoremi di derivazione sotto il segno di integrale si ha: $\dfrac{d\mathcal{L}}{ds}(s) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt \quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial s \partial t}(t,s)\, dt =$$

per il teorema di Schwarz

$$\text{''} \quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial t \partial s}(t,s)\, dt =$$

integrando per parti, poichè $\dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(0,s) = \dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(1,s) = 0$ si cancellano le valutazioni agli estremi

$$\text{''} \quad - \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s)\, dt =$$

essendo v chiuso

$$\text{''} \quad - \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s)\, dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt \quad - \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s)\, dt = \mathbf{0}$$

Teorema 5 : Se due cammini chiusi γ_1, γ_0 sono omotopi in A e v è un campo localmente integrabile in A allora

$$\int_{\gamma_0} v = \int_{\gamma_1} v.$$

Dimostrazione: come per il Teorema 4 la dimostrazione generale richiede altre tecniche. Si dà una dimostrazione solo per campi chiusi C^1, e per cammini chiusi C^2 con omotopia C^2, che è identica a quella del teorema 4 nelle analoghe ipotesi.

Si considerano due cammini chiusi $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0;1] \to A$, e una C^2 omotopia $\Gamma : [0;1]\times[0;1] \to A$, $\Gamma(t,s) = \gamma_s(t)$, di $t \mapsto \gamma_1(t)$ con $t \mapsto \gamma_0(t)$.
La differenza rispetto alla precedente dimostrazione è solo la seguente:
si osserva che da $\Gamma_j(0,s) = \Gamma_j(1,s)$ si ottiene $\dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(0,s) = \dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(1,s)$.
Sia $\mathcal{L}(s) = \displaystyle\int_{\gamma_s} v = \sum_{i=1}^n \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt$. Derivando L'integrale si ha: $\dfrac{d\mathcal{L}}{ds}(s) =$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt \quad + \sum_{i=1}^n \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial s \partial t}(t,s)\, dt =$$

per il teorema di Schwarz

$$\text{''} \qquad + \sum_{i=1}^n \int_0^1 v_i(\gamma_s(t)) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial t \partial s}(t,s)\, dt =$$

integrando per parti, poichè
$\dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(0,s) = \dfrac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(1,s)\ ,\ \ \Gamma_j(0,s) = \Gamma_j(1,s)$ ancora si cancellano le valutazioni agli estremi

$$\text{''} \qquad - \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s)\, dt =$$

essendo v chiuso

$$\text{''} \qquad - \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s)\, dt =$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(t,s)\, dt \quad - \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t)) \frac{\partial \Gamma_i}{\partial s}(t,s) \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t}(t,s)\, dt = \mathbf{0}$$

Teorema 6 : Se un aperto A è semplicemente connesso allora ogni campo localmente integrabile in A è esatto in A.

Dimostrazione: ancora la dimostrazione generale concerne altre tecniche.
- Per campi chiusi C^1 e per semplice connessione solo per omotopie C^2, una prima dimostrazione si ottiene come segue ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 1 ed usando il segunete fatto tecnico:

Proposizione 2 Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$ è un *aperto connesso* allora è connesso per cammini C^2.
- Fissato $x_A \in A$, per ogni $x \in A$ sia $\gamma_x = \gamma : [0;1] \to A$, che sia C^2 e per cui $\gamma(0) = x_A$, $\gamma(1) = x$. Una primitiva di v su A sarà data da

$$\int_{\gamma_x} v.$$

Va mostrato che tale quantità dipende solo da x e non dal cammino γ nella classe scelta.
- Si può inoltre supporre che $\gamma'(0) = \gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma''(1) = 0_{\mathbf{R^n}}$: basta infatti comporre γ con $\varphi : [0;1] \to [0;1]$ che sia C^2, strettamente crescente con $\varphi'(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$. L'integrale di v su $\gamma \circ \varphi$ è uguale a quello su γ.
- Sia quindi $\vartheta : [0;1] \to A$ congiungente x_A ad x, con le stesse proprietà. Il cammino *chiuso* $\gamma \ominus \vartheta$ è C^2 poichè nei punti di raccordo i cammini hanno gli stessi valori (x e x_A) cosi come le derivate prime e seconde (sono tutte nulle). Per cui essendo $\gamma \ominus \vartheta$ omotopo in A ad una costante $P \in A$:

$$\int_\gamma v \ - \ \int_\vartheta v \ = \ \int_{\gamma \ominus \vartheta} v \ = \ \int_P v \ = \ 0.$$

- Resta da mostrare che $\displaystyle\int_{\gamma_x} v$ è una primitiva di v su A. Si procede analogamente quanto fatto per il Teorema 1 sostituento alla parametrizzazione lineare del segmento che congiungente x ad $x+h$ con un cammino C^2 una parametrizzazione avente derivate prime e seconde nulle inizialmente in x.
Sia $r>0$ per cui $B(x,r)\subseteq A$ e sia $h\in\mathbf{R}^n$ con $0<|h|_n<r$, e si consideri il cammino C^2 da x a $x+h$, $\sigma(t)=x+t^3h$, $0\leq t\leq 1$, per cui $\sigma'(0)=\sigma''(0)=0_{\mathbf{R^n}}$.
Un cammino del tipo $\gamma\oplus\sigma$ è contenuto in A ed è C^2, e, poichè $\displaystyle\int_0^1\sigma'(t)dt=h$, si ha

$$f(x+h)-f(x)-\langle v(x)\cdot h\rangle=\int_{\gamma\oplus\sigma}v-\int_\gamma v-\langle v(x)\cdot h\rangle=\int_\gamma v+\int_\sigma v-\int_\gamma v-\langle v(x)\cdot h\rangle=$$
$$=\int_\sigma v-\langle v(x)\cdot h\rangle=\int_0^1\langle v(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\rangle dt-\langle v(x)\cdot h\rangle=\left\langle\int_0^1(v(\sigma(t))-v(x))\,dt\cdot\sigma'(t)\right\rangle=$$
$$=\left\langle\int_0^1(v(\sigma(t))-v(x))\,dt\cdot 3t^2h\right\rangle,$$

dividendo per $|h|_n>0$, poichè $\dfrac{h}{|h|}$ è limitato, e poichè v continuo passando al limite sotto segno di integrale, si ha che l'ultimo termine è $o(|h|)$ per $h\to 0$, che letto sul primo termine è la definizione che il differenziale di f è dato da $\langle v(x)\cdot h\rangle$, cioè $\nabla f(x)=v(x)$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

NOTA: in [F] e [FS] si usa la notazione delle forme differenziali:
($a(x,y)dx + b(x,y)dy$; $a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$; $a_1(x)dx_1 + \dots a_N(x)dx_N$ corrispondono rispettivamente ai campi di vettori
$(a(x,y), b(x,y))$; $(a(x,y,z), b(x,y,z); c(x,y,z))$; $(a_1(x_1,\dots,x_N),\dots,a_N(x_1,\dots,x_N))$.

[FS] pagg. 177- 190, 192-200;

[B] pagg. 522-529, 551-555, 564-565;

[F] pagg.350-369.