Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 19
MOLTIPLICATORI: FUNZIONI OMOGENEE, QUADRICHE E AUTOVALORI

Ottimizzazione di funzioni positivamente omogenee - Un sottoinsieme $D \neq \emptyset$ di uno spazio vettoriale si dice *cono positivo* (di vertice 0) se $\forall x \in D,\ t > 0$: $tx \in D$.

- Per $p \in \mathbf{R}$ una funzione reale f definita su un cono positivo D si dice *positivamente p-omogenea* (di centro 0) se $f(tx) = t^p f(x)$ per ogni $t > 0$ e $x \in D \setminus \{0\}$.

- Se $p > 0$, per $x \neq 0$, si ha $f(tx) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Se $p < 0$ e $f(x) \neq 0$, per $x \neq 0$, ha $f(tx) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \pm\infty$.

Ottimizzazione - Se F è positivamente 0-omogenea (costante sulle semirette) su un cono D per l'ottimizzazione ci si può ridurre a dimensione minore: *e.g.* restringendosi a $D \cap \partial B(0,1)$.
- Se F è positivamente p-omogenea, con $p \neq 0$, su un cono positivo D si ha:

$$A)\ \exists z \in D \setminus \{0\}\ F(z) > 0 \quad [\,F(z) < 0] \iff \sup_D F = +\infty \quad [\inf_D F = -\infty]$$

$$B)\ \forall x \in D\ \ F(x) \geq 0 \quad [\,F(x) \leq 0] \iff \inf_D F = 0 \quad [\sup_D F = 0]$$

Infatti: A) per ogni $t > 0$: $\sup F \geq F(tz) = t^p\, F(z)$ se $p > 0$ si considera $t \to +\infty$, se $p < 0$ invece $t \to 0^+$. B) per ogni $t > 0$: $0 \leq \inf F \leq F(tx) = t^p\, F(x)$ se $p > 0$ si considera $t \to 0^+$, se $p < 0$ invece $t \to +\infty$.

Quindi lo studio dell'ottimizzazione, su $D \cap \{g \neq 0\} \setminus \{0\}$, del rapporto $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ di funzioni positivamente omogenee (che è a sua volta una funzione positivamente omogenea) si banalizza se le due funzioni hanno grado di omogeneità diverso. In altri termini il problema: trovare $C \in \mathbf{R}$ per cui $f(x) \leq Cg(x)$ per ogni x, si banalizza (o non ha soluzione o $C = 0$).

Funzioni positivamente omogenee con vincoli positivamente omogenei - Se f e $g \not\equiv 0$, sono positivamente omogenee di egual grado p si ha per $k > 0$

$$\begin{cases} k \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \max\{ \sup\limits_{g(x)=k, x\neq 0} f(x)\ ,\ \sup\limits_{g(x)=-k, x\neq 0} -f(x)\} \\[2ex] k \inf\limits_{x\neq 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \min\{ \inf\limits_{g(x)=k, x\neq 0} f(x)\ ,\ \inf\limits_{g(x)=-k, x\neq 0} -f(x)\} \end{cases}$$

e in particolare:
$$\begin{cases} k \sup\limits_{x\neq 0, g(x)>0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sup\limits_{g(x)=k, x\neq 0} f(x) \\[2ex] k \inf\limits_{x\neq 0, g(x)>0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \inf\limits_{g(x)=k, x\neq 0} f(x) \end{cases}$$
analogo per $g(x) < 0$.

Infatti, per $p \neq 0$, si ha $k\dfrac{f(x)}{g(x)} = \mathit{segno}\ g(x) f\left(\dfrac{x k^{\frac{1}{p}}}{|g(x)|^{\frac{1}{p}}}\right)$. Ma $g\left(\dfrac{x k^{\frac{1}{p}}}{|g(x)|^{\frac{1}{p}}}\right) = k\ \mathit{segno}\ g(x)$.

- Viceversa i problemi di ottimizzazione di funzioni positivamente omogenee di grado $p \neq 0$, con vincolo $\{g = c\}$, g positivamente omogenea di grado $q \neq 0$, $c \neq 0$, si riconducono ai precedenti pareggiando i gradi: $\gamma(x) = \mathit{segno}\ g(x)|g(x)|^{\frac{p}{q}}$. Per esempio con $c > 0$:

$$\text{se } c > 0 \quad \sup_{\substack{g(x)=c \\ x\neq 0}} f(x) = \sup_{\substack{\gamma(y)=c^{\frac{p}{q}} \\ y\neq 0}} f(y) = c^{\frac{p}{q}} \sup_{\substack{g(x)>0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{(g(x))^{\frac{p}{q}}}\ ,$$

analogamente per $c < 0$ e per gli estremi inferiori.

Moltiplicatori e funzioni positivamente omogenee. Siano $h \in \mathbf{R}^{N-M}$, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ e $g : \Omega \to \mathbf{R}^{N-M}$ funzioni definite su Ω aperto di $\mathbf{R}^N$, differenziabili con continuità, per cui $\nabla g(x)$ è di rango massimo per $x \in E = \{x : g(x) = h\} \neq \emptyset$. I punti tra cui eventualmente trovare quelli di massimo e minimo di f ristretta a E: $\quad \max_{g=h} f$, $\quad \min_{g=h} f$,
son i punti $x \in E$ stazionari tangenziali lungo E di f, cioè quelli per cui $\nabla f(x)$ sia ortogonale al tangente nel punto x a E. Sono appunto le soluzioni del sistema di Lagrange:

$$\text{vi sia } \lambda \in \mathbf{R}^{N-M}: \qquad \nabla f(x) = \nabla g(x)\lambda \quad \text{ e } \quad g(x) = h \qquad \text{cioè:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & = \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \cdot \lambda \rangle \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & = \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \cdot \lambda \rangle \\ & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) & = \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_d}(x) \cdot \lambda \rangle \\ \\ g(x) & = h \end{cases}$$

Ovvero le prime componenti dei punti stazionari di $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \langle (g(x) - h) \cdot \lambda \rangle$.

Se poi f è positivamente p-omogenea, $p \neq 0$, e g_j, $1 \leq j \leq N - M$ sono positivamente q_j omogenea, definite in $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ (o anche su un cono), grazie al teorema di Eulero, per le soluzioni (x, λ) del sistema di Lagrange si ha

$$\begin{cases} pf(x) \ = \ \langle x \cdot \nabla f(x) \rangle \ = \ \langle x \cdot \nabla g(x)\lambda \rangle \ = \ \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_{N-M} \nabla g_{N-M}(x) = \\ \\ \qquad = \lambda_1 q_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_{N-M} q_{N-M} g_{N-M}(x) = \lambda_1 q_1 h_1 + \cdots + \lambda_{N-M} q_{N-M} h_{N-M} \\ \\ g(x) = h \end{cases}$$

a livello di manipolazione del sistema ciò corrisponde a moltplicare l'equazione delle derivate parziali i^e per la variabile x_i e quindi sommarle tutte.

Si ha che il *valore critico* relativo a una soluzione (x, λ) del sistema di Lagrange $V_c(x, \lambda)$ di f nell'eventuale x punto stazionario tangenziale *corrispondente* al moltiplicatore λ è

$$V_c(x, \lambda) \ = \ \lambda_1 \frac{q_1}{p} h_1 + \cdots + \lambda_{N-M} \frac{q_{N-M}}{p} h_{N-M}.$$

la dipendenza da x essendo appunto in λ. Quindi assumendo che esistano il massimo e il minimo assoluti di f su E, in via generale, per le funzioni omogenee con vincoli "omogenei", non serve trovare i punti stazionari tangenziali x ma solo i moltiplicatori λ *ad essi corrispondenti.*

<u>Osservazione:</u> Va sottolineato che i λ per cui si considera il valore critico $V_c(\lambda)$ devono esser quelli per cui *esiste un* x per cui (x, λ) risolve il sistema di Lagrange. Cioè *non tutti* i λ per cui la relazione differenziale è soddisfatta per qualche x generico, ma solo quelli per cui anche $g(x) = h$.

Moltiplicatori e forme quadratiche - se f e g_j, $1 \leq j \leq N - M$, sono forme quadratiche in $\mathbf{R}^N$, cioè polinomi omogenei di secondo grado: $f(x) = \langle Ax \cdot x \rangle$, $\quad g_j(x) = \langle B^{(j)} x \cdot x \rangle$, ($A$, $B^{(j)}$ matrici simmetriche) ci si riduce ad un problema di *Algebra Lineare.*

Assumendo $\nabla g(x) = (2B^{(1)}x|\dots|2B^{(N-M)}x)$ di rango massimo per $x \in E$, $g(x) = h$, il sistema di Lagrange assume la forma $\begin{cases} 2\left(A - \lambda_1 B^{(1)} - \dots - \lambda_{N-M}B^{(N-M)}\right)x = 0_{\mathbf{R}^N} \\ \\ g(x) = h \end{cases}$

- pertanto i *valori critici* V_c *da confrontare* sono quelli del tipo $\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{N-M}h_{N-M}$ relativi ai moltiplicatori da *cercarsi tra* le soluzioni di

$$\det\left(A - \lambda_1 B^{(1)} - \dots - \lambda_{N-M}B^{(N-M)}\right) = 0$$

- e, se $g(0_{\mathbf{R}^N}) = h$, anche il valore critico tangenziale $f(0_{\mathbf{R}^N})$ deve esser confrontato.

<u>Osservazione:</u> come nella precedente osservazione si sottolinea che vanno presi in considerazione i λ per cui il sistema lineare non solo ha soluzione x ma deve anche esser $g(x) = h$.

Proprietà di minimizzazione degli autovalori di una matrice simmetrica.

- Sia S una matrice simmetrica reale $N \times N$.
I punti critici tangenziali su $S^{N-1} = \{v \in \mathbf{R}^N : |v|_N = 1\}$ della forma quadratica
$\mathcal{Q}(x) = \langle Sx \cdot x \rangle$
sono tutti e soli gli autovettori unitari di S e i rispettivi valori critici sono gli autovalori.

Dimostrazione: I punti critici tangenzali di $\mathcal{Q}(x)$ su S^{N-1} sono la componente vettoriale v delle soluzioni (v, λ) del sistema di Lagrange $\begin{cases} 2Sv = 2\lambda v \\ \\ \langle v \cdot v \rangle = 1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} Sv = \lambda v \\ \\ \langle v \cdot v \rangle = 1 \end{cases}$.
Sono quindi gli autovettori unitari di S, e i rispettivi autovalori sono i moltiplicatori di Lagrange. Come visto per 2 positiva omogeneità si ha $\mathcal{Q}(v) = \lambda$, ovvero i moltplicatori corrispondono ai valori critici.

<u>Osservazione:</u> induttivamente, con tale metodo, si prova che una matrice $N \times N$ reale simmetrica S ha N autovalori contati con molteplicità geometrica. Si prova quindi il teorema spettrale con l'ausilio del teorema di Wiestrass piuttosto che del teorema fondamentale dell'algebra.

Caratterizzazione variazionale: Grazie al teorema di Weiestrass sono bene definiti (v^i, λ_i), $1 \leq i \leq n$:

$$\lambda_1 = \max_{|v|_N=1} \mathcal{Q}(v) = \mathcal{Q}(v^1) \;\geq\; \lambda_2 = \max_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^1 \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v) = \mathcal{Q}(v^2) \;\geq\; \dots$$

$$\dots \;\geq\; \lambda_k = \max_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v \cdot v^{k-1} \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v) = \mathcal{Q}(v^k) \;\geq\; \dots \;\geq\; \lambda_N = \max_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v \cdot v^{N-1} \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v) \;=\; \mathcal{Q}(v^N)\;,$$

- - Si ha:
1) $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ sono gli autovalori con molteplicità di S; rispettivi autovettori i $v^1 \perp \dots \perp v^N$.
2) $\lambda_k = \min\limits_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^N \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v \cdot v^{k+1} \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v)$, $k < N$, $\lambda_N = \min\limits_{|v|_N=1} \mathcal{Q}(v)$.

Dimostrazione: 1) Per induzione su $k \le N$. Se v^k è il punto di massimo relativo a λ_k vi sono $\mu, \mu_1, \dots \mu_{k-1}$ per cui è soddisfatto il sistema di Lagrange $\begin{cases} 2Sv^k = 2\mu v^k + \mu_1 v^1 + \cdots + \mu_{k_1} v^{k-1} \\ \\ \langle v^k \cdot v^1 \rangle = \cdots = \langle v^k \cdot v^{k-1} \rangle \ = \ 0 \\ \\ \langle v^k \cdot v^k \rangle = 1 \end{cases}$.

Per 2 positiva omogeneità si ottiene $2\mathcal{Q}(v^k) = 2\langle Sv^k \cdot v^k \rangle = 2\mu$: cioè $\lambda_k = \mu$.

Poichè $\langle Sv \cdot v^i \rangle = \langle v \cdot Sv^i \rangle$ per *ipotesi induttiva* per $1 \le i \le k-1$ si ha $\langle Sv \cdot v^i \rangle = \lambda_i \langle v \cdot v^i \rangle$. Da $v^k \perp v^i,\ 1 \le i \le k-1$ ne segue che anche $Sv^k \perp v^i,\ 1 \le i \le k-1$ quindi $\mu_1 = \cdots = \mu_{k-1} = 0$. quindi $Sv^k = \lambda_k v^k$.

2) Come sopra induttivamente si mostra che gli $\gamma_k = \min\limits_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^N \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v \cdot v^{N-k+2} \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v)$ sono gli autovalori ripetuti di S, ma ordinati con in modo crescente.

Quindi $\lambda_N = \gamma_1$ e $\lambda_k = \gamma_{N-k+1} = \min\limits_{\substack{|v|_N = 1 \\ \langle v \cdot v^N \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v \cdot v^{k+1} \rangle = 0}} \mathcal{Q}(v)$.

Moltiplicatori e polinomi di secondo grado Se f e g sono polinomi di secondo grado,

$$f(x) = \langle Ax \cdot x \rangle \ + \ \langle a \cdot x \rangle + \alpha, \ , \ \ g_j(x) = \langle B^{(j)} x \cdot x \rangle \ + \ \langle b^j \cdot x \rangle + \beta_j$$

(E è un'intersezione di quadriche)

con $\nabla g(x) = (2B^{(1)} x + b^1 | \dots | 2B^{(N-M)} x + b^{N-M})$ di rango massimo per gli $x \in (E,\, g(x) = h$, ci si riduce a un sistema lineare con parametri non omogeneo, passando attraverso polinomi omogenei di secondo grado con una variabile t in più (variabile all'infinito) e un vincolo in più $\Gamma(x,t) =: t$, $\Gamma = 1$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] pag. 291, pag. 294-295 (moltiplicatori e forma quadratiche);

[B] pagg. 380-381 (forme quadratiche, moltiplicatori ed autovalori: una caratterizzazione variazionale);

[F] pagg. 629-634 (moltiplicatori e funzioni positivamente omogenee).