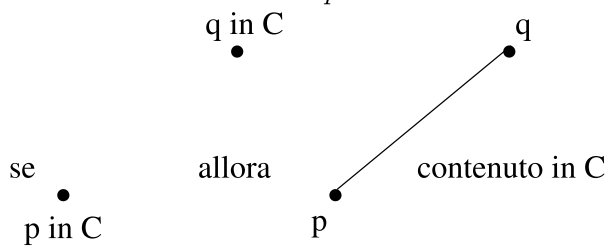
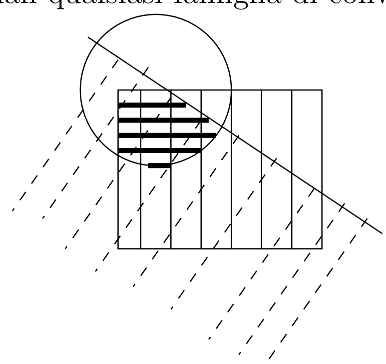
Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 20
FUNZIONI CONVESSE: NOZIONI DI BASE

Insiemi convessi: un sottoinsieme C di uno *spazio vettoriale* si dice *convesso* se



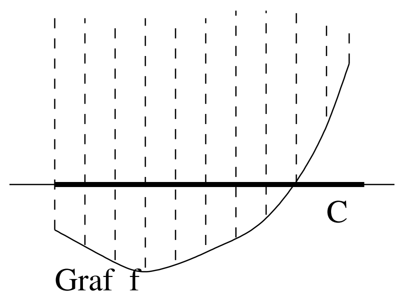
- in formule $p \in C,\ q \in C\ \Rightarrow\ \forall t \in [0;1]\ tq + (1-t)p = p + t(q-p) \in C$; in particolare se lo spazio vettoriale ambiente è $\mathbf{R}^N$:
$p = (p_1, \dots p_N) \in C,\ q = (q_1, \dots, q_N) \in C \Rightarrow \forall t \in [0;1]\ (p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_N + (q_N - p_N)) \in C$.

Interesezioni: intersezione di uan qualsiasi famiglia di convessi è un convesso



Sulla retta: i coonvessi di $\mathbf{R}$ sono tutti e solo gli intervalli: retta, semirette e segmenti con o senza qualche estremo.

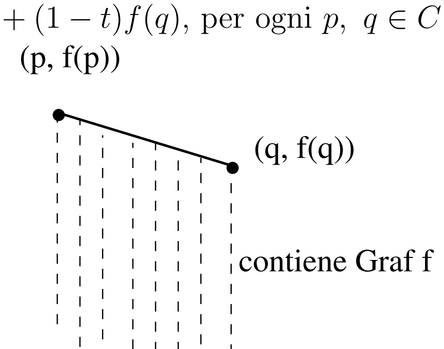
Funzioni convesse: - sia C convesso, una funzione $f : C \to \mathbf{R}$ si dice convessa se il suo sopragrafico$\{(x, y) \in C \times \mathbf{R} : y \geq f(x)\}$ è convesso.



PROPOSIZIONE 0 - Una funzione su C convesso è convessa se e solo se

- *ogni corda con estremi sul suo grafico sta sopra il grafico*

cioè: $f(tp + (1-t)q) \leq tf(p) + (1-t)f(q)$, per ogni $p,\ q \in C$ e $t \in [0;1]$,



se e solo se

- le sue restrizioni alle intersezioni di rette con C sono funzioni convesse;

se e solo se

- per ogni p , $q \in C$ le composizioni $g(t) = f(q + t(p - q))$ $t \in [0; 1]$ sono funzioni convesse.

PROPOSIZIONE 1 - per una funzione derivabile f reale di una variabile reale su C intervallo:

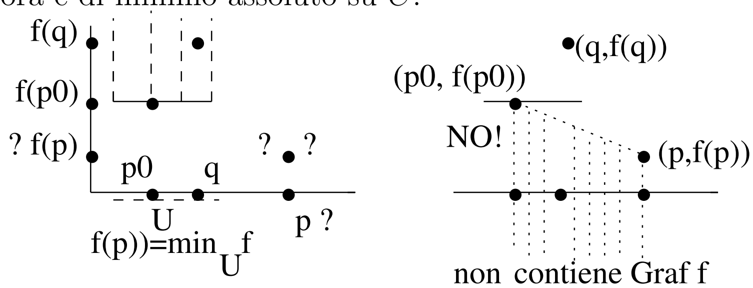
$$[f \text{ è convessa}] \Leftrightarrow [\text{il } \textit{grafico sta sopra le sue rette tangenti}] \Leftrightarrow [f' \text{ è crescente}].$$

- se due volte derivabile: $[f$ è convessa$] \Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Nozioni relative al supporto affine: Sia C convesso si dicono:

- *supporto affine* A di C il più piccolo sottospazio affine (traslato di un sottospazio vettoriale) che contiene C.
- *dimensione* di C la dimensione del suo supporto affine.
- *interno relativo* $int_{rel}C$ di C: è la parte interna di C come sottoinsieme del suo supporto affine.
- *frontiera relativa* $\partial_{rel}C$ di C: è la frontiera di C come sottoinsieme del suo supporto affine.
- *chiusura relativa* $cl_{rel}C$ di C: la chiusura di C come sottoinsieme del suo supporto affine.

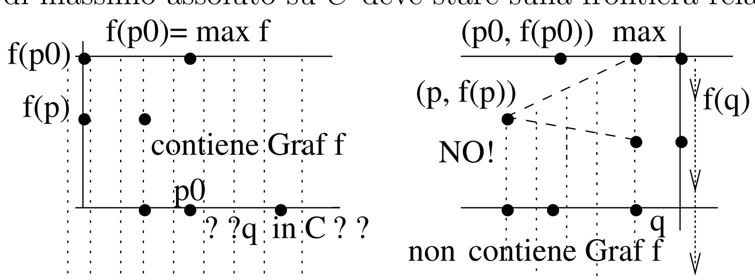
TEOREMA 1 Data funzione convessa f su un insieme C convesso: se un punto $p_0 \in C$ è di minimo relativo allora è di minimo assoluto su C.



DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale:se p_0 è di minimo relativo di f su C e non fosse di minimo assoluto su C vi sarebbe $p \in C$ per cui $f(p_0) > f(p)$.
2) Ora essendo p_0 di minimo locale per t piccolo si ha $f(p_0) \leq f(p_0 + t(p - p_0))$.
3) Ma per convessità deve essere

$$f(p_0 + t(p - p_0)) \leq tf(p) + (1 - t)f(p_0) < tf(p_0) + (1 - t)f(p_0) = f(p_0)$$

TEOREMA 2 Data funzione convessa f su un insieme C convesso, e sia f *non costante*: se un punto $p_0 \in C$ è di massimo assoluto su C deve stare sulla frontiera relativa.



DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale: se p_0 è di massimo assoluto di f su C e f non è costante deve esistere $p \in C$ per cui $f(p) < f(p_0)$.
Se per assurdo p_0 fosse nell'interno relativo di C vi sarebbe:
$q \in C$ allineato con p_0 e p con p_0 compreso tra q e p e $[q; p] \subseteq C$
(cioè $\exists \varepsilon : \forall t \in [-\varepsilon; 1]$ $p_0 + t(p - p_0) \in C$, $q =: p_0 - \varepsilon(p - p_0)$).
2) Essendo p_0 di massimo $f(q) \leq f(p_0)$.
3) Essendo p_0 tra q e p si ha $p_0 = p + \lambda(q - p)$ per qualche $\lambda \in (0; 1)$. Per convessità deve essere $f(p_0) = f(p + \lambda(q - p)) \leq \lambda f(q) + (1 - \lambda)f(p) < \lambda f(p_0) + (1 - \lambda)f(p_0) = f(p_0)$

COROLLARIO Data funzione convessa f su un insieme C convesso: se un punto $p_0 \in C$ è di massimo relativo su C e in ogni suo intorno f è non costante, allora p_0 deve stare sulla

Monotonia di campi: $V : D \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ si dice *monotono* se $\langle \big(V(z) - V(x)\big) \cdot (z - x) \rangle \geq 0$, per ogni $x,\ z \in D$.

TEOREMA 3 - sia $f : C \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ differenziabile su C aperto convesso:

$$f \text{ è convessa}$$
$$\Updownarrow$$
il *grafico sta sopra i suoi piani tangenti*, cioè $f(z) \geq (z - x) \cdot \nabla f(x) + f(x)$ per ogni $x,\ z \in C$
$$\Updownarrow$$
$$\nabla f \text{ è monotono, cioè } \langle \big(\nabla f(z) - \nabla f(x)\big) \cdot (z - x) \rangle \geq 0 \text{ per ogni } x,\ z \in C\ .$$

- Se f è due volte differenziabile: f è convessa $\Leftrightarrow$ $Hf(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in C$.

TEOREMA 4 Data funzione f su un insieme $C \subseteq$ convesso di $\mathbf{R}^N$, allora f è continua sulla parte interna relativa di C.

Anzi è *localmente Lipscitziana* nella parte interna relativa: cioè: per ogni $r > 0$ e p interno relativo a C per cui $B(p, r) \cap C \subseteq int_{rel} C$ allora vi è $L = L(p, r)$ per cui

$$|f(x) - f(z)| \leq L|x - z|_{\mathbf{R}^d},\ \forall x,\ z \in B(p, r) \cap C.$$