Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 25

PARALLELO DEL "LEMMA DI POINCARÉ" PER I POTENZIALI VETTORI

Per le notazioni le definizioni e notazioni si fa riferimento al Foglio di Teoria 23 (campi conservativi, integrabili e chiusi), al Foglio di Teoria 24 (integrazione orientata su superficie), e all'esercizio 16 del Foglio di Esercizi 13. Si richiamano i fatti princpali:

Stellati: - un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice *stellato rispetto a un suo punto* $x_0 \in A$ se contiene tutti i segmenti con un estremo in x_0 e l'altro in un altro punto di A:
se $x \in A$ e $0 \le t \le 1$ allora $x_0 + t(x - x_0) \in A$.

Teorema 3:(Lemma di Poincaré elementare) Sia A aperto stellato di $\mathbf{R}^n$, e V un campo *chiuso* su A (quindi C^1 su A). Allora V è integrabile su A, e per $x \in A$ detto $\sigma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ il segmento parametrico di estremi x_0 e x, una primitiva è

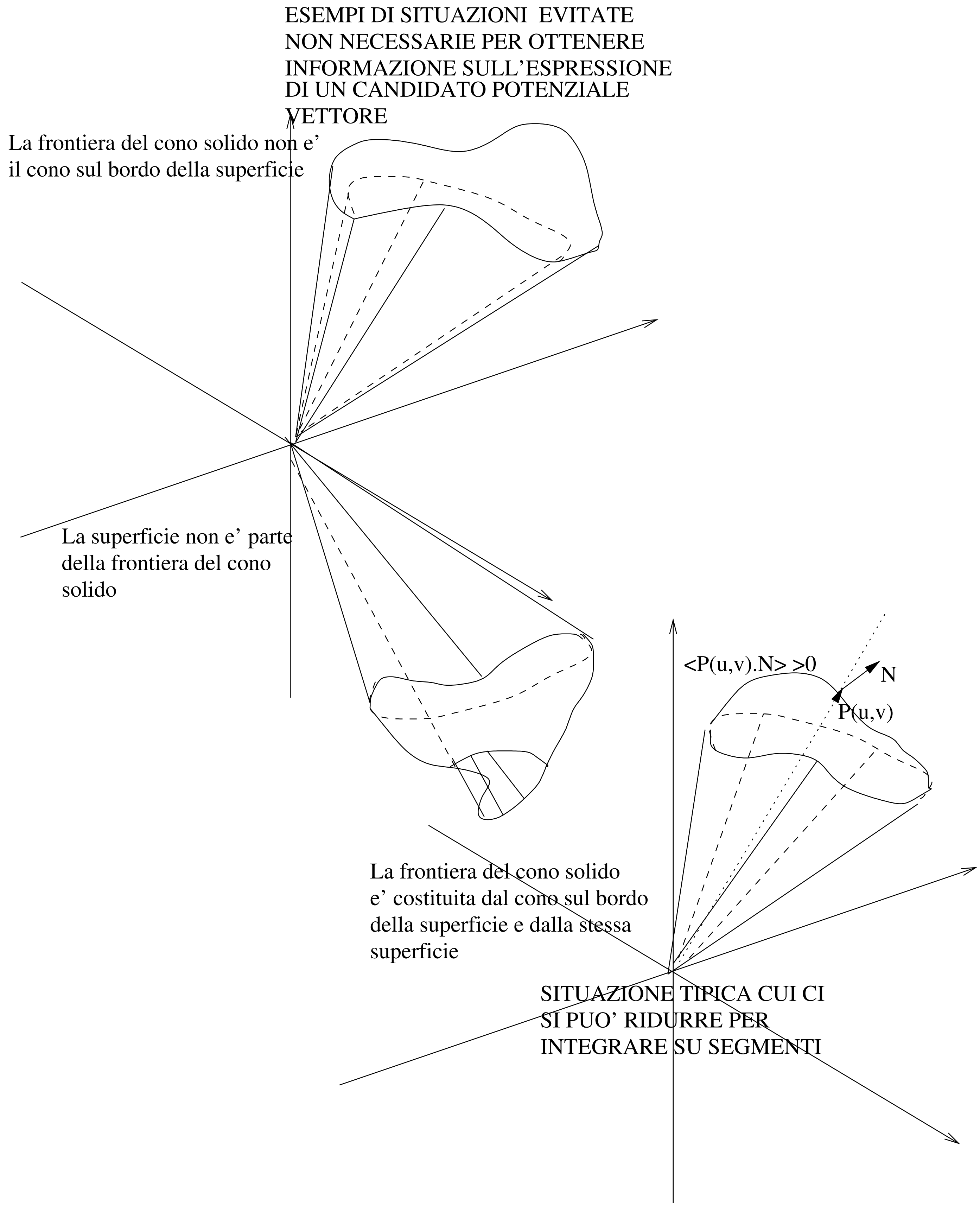
$$f(x) \; = \; \int_\sigma V \; = \; \int_0^1 \langle V(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)\rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n V_i(x_0 + t(x - x_0))(x^i - x_0^i)\, dt.$$

<u>Domanda:</u> (cfr. Es.16FE 13) i- se A aperto stellato di $\mathbf{R}^3$, per semplicità rispetto all'origine, e V un campo C^1 *indivergente* su A in analogia avrà un *potenziale vettore* W ?
ii- come trovare, nel caso, un candidato che sia esprimibile con integrali lungo segmenti del campo dato V?

ii) Per individure un candidato, e rispondere alla seconda domanda, si può procedere come segue: se $V = \mathrm{r}otW$ allora per ogni $\Sigma = \Sigma(u, v) : D \to \mathbf{R}^3$ superficie parametrica C^1, cfr. FT 14, 16, con $D = \overline{D^o} \subseteq \mathbf{R}^2$ connesso limitato con D^o aperto regolare, e ∂D regolare a tratti, descritto con la sua orientazione positiva dai cammini chiusi C^1 a tratti $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, deve essere per il teorema d Stokes in forma parametrica, cfr. FT 24:

$$\int_\Sigma V \; = \; \int_{\Sigma(\partial^+ D)} W.$$

Per ottenere integrazioni lungo segmenti di V si considerano quelli congiungenti il sostegno di Σ con l'origine (ottenendo un cono) e si usa il tereoma di Stokes per passare dai flussi attraverso Σ a quelli *attraverso la superficie laterale del cono* riducendosi appunto ad un integrale *di integrali lungo segmenti.* Si esamina prima in modo grossolano l'idea (cfr. figure):
- si assume per semplicità che il bordo di D abbia una sola componente $\gamma = \gamma(s)$.
- Quindi si assume che il cono P di vertice l'origine e "base ondulata" il sostegno di Σ, sostegno di $P(t, u, v) = t\Sigma(u, v),\ t \in [0; 1]$, sia la chiusura di una aperto.
- Di più: che la *frontiera* di tale cono P sia costituita da due pezzi: il cono costruito sull'immagine di $\Sigma\circ\gamma$: parametrizzato da $t\Sigma(\gamma(s))$ (la superficie laterale C), e dal sostegno di Σ (la "base" del cono).
- Si orienti la base, il supporto di Σ, in modo che N, la normale orientante, punti "all'esterno" rispetto all'origine ovvero $\langle N \cdot \Sigma\rangle > 0$. Si orienti C, la superficie laterale del cono, in modo che la normale N_C sia esterna. Ovvero considerando, appunto, che la superficie del cono coincida con la frontiera del sostegno di P, la si sta orientando con la normale esterna.
- Sia quindi $\eta(s), s \in [0; L]$ una parametrizzazione di ∂D, equivalente a γ o a $\ominus\gamma$, in modo che $\Sigma\circ\eta$ dia "l'orientazione" indotta da N sulle parti del sostegno di Σ che siano suoi punti di bordo. Poichè si sta pensando che il sostegno di Σ e la superficie laterale C del cono si incollano solo lungo il sostegno di $\Sigma\circ\gamma$ questi, visto come bordo di C, viene orientato positivamente rispetto alla normale N_C da $\beta(s) = \ominus\eta(s)$.



Assumendo che rot W $= V$ per il teorema di Stokes

$$\int_\Sigma V = \int_{\Sigma\circ\ominus\beta} W = -\int_{\Sigma\circ\beta} W = -\int_C V$$

si assume che N_C, normale esterna, sia data da $\partial_t C \times \partial_s C = \Sigma\beta \times (tD\Sigma\beta')$, si ha

$$\int_{\Sigma\circ\beta} W = \int_C V = \int_0^L \left(\int_0^1 t\langle V(t\Sigma(\beta(s))) \cdot \Sigma(\beta(s)) \times D\Sigma(\beta(s))\beta'(s)\rangle dt \right) ds$$

In altri termini detto λ il cammino $\Sigma\circ\beta$ in $\mathbf{R}^3$, si ha $\displaystyle\int_{\Sigma\circ\beta} W = \int_C V =$

$$= \int_0^L \left(\int_0^1 t\langle V(t\lambda(s)) \cdot \lambda(s) \times \lambda'(s)\rangle dt \right) ds = \int_0^L \left(\int_0^1 t\langle V(t\lambda(s)) \times \lambda(s) \cdot \lambda'(s)\rangle dt \right) ds =$$

$$= \int_0^L \left\langle \int_0^1 t\langle V(t\lambda(s)) \times \lambda(s)\, dt \cdot \lambda'(s) \right\rangle ds = \int_\lambda \int_0^1 tV(tx) \times x\, dt = \int_{\Sigma\circ\beta} \left(\int_0^1 tV(tx) \times x\, dt \right)$$

cioè il campo definito dall'integrale lungo segmenti $\widetilde{W}(x) = \displaystyle\int_0^1 tV(tx) \times x\, dt,\ x \in A$ è un candidato potenziale vettore di V.

Osservazione: se ci fosse W si prova che $\mathrm{rot}(W - \widetilde{W}) = 0$ (cfr. Eserczio in calce), e quindi essendo il dominio stellato per il lemma di Poncaré $W = \widetilde{W} + \nabla f$.

i) Resta da dimostrare nelle ipotesi fatte l'esistena del potenziale vettore ovvero che $\widetilde{W}$ è in effetti un potenziale vettore di V su A. Ci sono due vie:

i.1- calcolare direttamente $\mathrm{rot}\widetilde{W}$ derivando sotto segno di integrale ed usando, con $A(x) = V(tx),\ B(x) = x$, la formula: $\mathrm{rot}\,(A \times B) = A\ \mathrm{div}\, B - B\ \mathrm{div}\, A - \left(\dfrac{\partial B}{\partial A} - \dfrac{\partial A}{\partial B} \right)$.

i.2- ripetere con variazione l'argomento per ii) che porta alla definizione di $\widetilde{W}$: invece di usare il teorema di Stokes e che V abbia potenziale vettore, si usa il teorema della divergenza e che $\mathrm{div}\ V = 0$: $\displaystyle\int_\Sigma V = -\int_C V$. Ma come in ii) $\displaystyle\int_C V = \int_{\Sigma\circ\beta} \widetilde{W}$. Quindi il punto f) dell'esercizio.

ESERCIZIO: a) un disco piano in $\mathbf{R}^3$ di centro p e raggio L, $D_{L,p,H,K}$ è il sostegno di $\Sigma_{L,p,H,K}(u,v) = \Sigma(u,v) = p + u(H\cos v + K\sin v)$, con $H,\ K \in \mathbf{R}^3$ ortonormali, $(u,v) \in [0;L] \times [0;2\pi] = R$. Cosa si ottiene se H e K sono solo ortogonali e di ugual lunghezza? Cosa si ottiene se H e K sono solo ortogonali? Cosa si ottiene se H e K sono solo indipendenti?
b) Che condizione imporre su $H,\ K,\ p$ affinchè l'origine non sia nel piano del disco?
c) Nel caso che condizione imporre $H,\ K,\ p$ affinchè l'orientazione indotta c$\partial_u\Sigma \times \partial_v\Sigma$ sia rivolta nel semispazio, determinato dal piano di giacenza del disco, non contente l'origine?
d) Se $\gamma = \partial^+ R$ parametrizza ∂R orientata positivamente nel piano che cammino in $\mathbf{R}^3$ è $\Sigma\circ\gamma$? Quale sua parte dá un contributo effettivo all'integrazione di campi lungo di esso?
e) Dato un campo U regolare in $\mathbf{R}^3$ si mostri che se su ogni disco piano orientato $D_{\varepsilon,p,H,K}$, si ha $\displaystyle\int_{b^+D} U = 0$ allora $\mathrm{rot}U = (0,0,0)$. [Si mostri che l'elemento d'area orientato di un disco, parametrizzato da $\Sigma = \Sigma_{\varepsilon,p,H,K}$ di raggio ε e centro p, dato come $\partial_u\Sigma \times \partial_v\Sigma$ è $uH \times K$, $0 \le u \le \varepsilon$. Si assuma che se f è una funzione continua $\dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}\displaystyle\int_{D_\varepsilon} f ds_2 \to f(p)$ e si usi Stokes.]

• f) Se W è C^1 e, su ogni disco orientato $D_{\varepsilon,p,H,K}$, si ha $\displaystyle\int_{D_\varepsilon} V = \int_{b^+D_\varepsilon} W$ allora $\mathrm{rot}W = V$.
[Senza usare Stokes.Usare gli sviluppi di Taylor in p di W. Calcolare il limite di $\dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}\displaystyle\int_{b^+D_\varepsilon} W$.].

SOLUZIONE: e) - per il teorema di Stokes $\displaystyle\int_{D_\varepsilon} \mathrm{rot}U = \int_{b^+D_\varepsilon} U = 0$. - Il disco $D_\varepsilon(p,H,K)$ sia paramterizzato da $\Sigma(u,v) = p + u\cos v \cdot H + u\sin v \cdot K$, $(u,v) \in [0;\varepsilon] \times [0;2\pi] = R$, $\langle H \cdot K\rangle = 0$, $|H|_{\mathbf{R}^3} = |K|_{\mathbf{R}^3} = 1$, e orientato da $N = H \times K$, $\langle \Sigma \cdot N\rangle > 0$ (cfr. c)).

- Ai fini dell'integrazione orientata $\Sigma(\partial^+ R)$ può essere sostituito dalla circonferenza che è bordo del sostegno di Σ, orientata coerentemente con N: b^+D, e parametrizzata da $\Sigma(\varepsilon, v) = p + \varepsilon \cos v \cdot H + \varepsilon \sin v \cdot K$. Sull'immagine degli altri lati orientati di R gli integrali si annullano.

- Si ha $\partial_u \Sigma \times \partial_v \Sigma = (\cos v \cdot H + \sin v \cdot K) \times u(-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) = uH \times K \ = \ uN$.
- Pertanto $0 = \displaystyle\int_D U = \left\langle \left(\int_0^\varepsilon u du \int_0^{2\pi} U(p + u\cos v \cdot H + u \sin v \cdot K) dv \right) \cdot N \right\rangle$ per ogni N.
inoltre $\displaystyle\left| \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon u du \int_0^{2\pi} U(p + u\cos v \cdot H + u \sin v \cdot K) dv - U(p) \right| \leq$
$\displaystyle\leq \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon u\, du \int_0^{2\pi} |U(p + u\cos v \cdot H + u \sin v \cdot K) - U(p)|\, dv \leq \frac{2\pi}{\pi\varepsilon^2} c \int_0^\varepsilon u\, du \ \cdot \ \sup_{q \in D_\varepsilon} |U(q) -$
$U(p)| =$
$= \displaystyle\sup_{q \in D_\varepsilon} |U(q) - U(p)| \to 0, \ \varepsilon \to 0$. Quindi per ogni N si ha $\langle U(p) \cdot N \rangle = 0$ ovvero $U(p) = 0$.

f) *Senza Usare Stokes.* - Come sopra si ha $\displaystyle\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon} V \to \langle V(p) \cdot N \rangle, \ \varepsilon \to 0$. - Per ipotesi si ha:

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon} V = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{b^+D_\varepsilon} W = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \varepsilon \int_0^{2\pi} \langle W(p + \varepsilon \cos v \cdot H + \varepsilon \sin v \cdot K) \cdot (-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) \rangle\, dv,$$

sviluppando W in p al primo ordine $W(p + \varepsilon\nu) \ = \ W(p) \ + \ \varepsilon DW(p)\nu \ + \ o(\varepsilon\nu)$ (ove, per differenziabilità, $\sup_{|\nu| \leq 1} |o(\varepsilon\nu)| = o(\varepsilon)$). Posto $\nu = \nu(v) = \cos v \cdot H + \sin v \cdot K$, si ha:

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon} V = \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \langle (W(p) \ + \ \varepsilon DW(p)\nu \ + \ o(\varepsilon\nu)) \cdot (-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) \rangle\, dv =$$
$$= \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \langle W(p) \cdot (-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) \rangle\, dv \ +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \langle DW(p)(\cos v \cdot H + \sin v \cdot K) \cdot (-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) \rangle dv +$$
$$+ \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \langle o(\varepsilon\nu) \cdot (-\sin v \cdot H + \cos v \cdot K) \rangle dv,$$

poichè l'integrale tra 0 e 2π di seno e di coseno è nullo il primo addendo è nullo. Per la diseguaglianza triangolare dell'integrale e la diseguaglianza di Cauchy-Scwarz del prodotto scalare il terzo addendo è infinitesimo per $\varepsilon \to 0$. Per il secondo addendo, $\mathcal{A}$, considerando i prodotti scalari come prodotti righe per colonne, i vettori come colonne, indicando con ${}^t v$ il vettore riga, e il differenziale come matrice Jacobiana, si ha:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin v\, {}^t H + \cos v\, {}^t K) DW(p) (\cos v\, H + \sin v\, K)\, dv =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\sin v \cos v\, {}^t H DW(p) H - \sin^2 v\, {}^t H DW(p) K + \cos^2 v\, {}^t K DW(p) H + \sin v \cos v\, {}^t K DW(p) K \right) dv$$

ma $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin v \cos v\, dv = 0, \ \int_0^{2\pi} \sin^2 v\, dv = \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv = \pi$, quindi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\cos^2 v\, {}^t H DW(p) K + \cos^2 v\, {}^t K DW(p) H \right) dv = {}^t H \left({}^t DW(p) - DW(p) \right) K =$$

$= \langle \mathrm{rot} W(p) \cdot H \times K \rangle = \langle \mathrm{rot} W(p) \cdot N \rangle$ per cui per ogni N si ha $\langle \mathrm{rot} W(p) \cdot N \rangle = \langle V(p) \cdot N \rangle$, cioè $V(p) = \mathrm{rot} W(p)$.