Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 24Bis

SUNTO FT24 INTEGRAZIONE ORIENTATA DI CAMPI

Premessa

Oggetti orientati da misurare:

1-*vettore*= vettore=segmenti orientati tra loro traslati: grazie al sistema di coordinate canonico un tale segmento si identifica con le coordinate dell'estremo del suo traslato nell'origine; *campi* di vettori $\sim$ funzioni a valori vettori;
2-*vettore semplice*=parallelogrammi di egual area "orientati" con egual giacitura = coppie ordinate (u, v) di vettori (lati generatori) su uno stesso piano in cui la matrice delle coordinate di una coppia rispetto all'altra abbia determinante positivo eguale ad 1 nel caso non degenere (per definire i 2-vettori in generale cfr. paragrafo seguente).
In $\mathbf{R}^3$ un 2-vettore semplice si identifica con il vettore $w = u \times v$, ortogonale alla giacitura, per cui $\det(u, v, w) = |w|^2$, (ogni w è del tipo $u \times v$), è pertanto naturale dare una stuttura di spazio vettoriale ai 2-vettori di $\mathbf{R}^3$, ma le regole di cambiamento di coordinate su u e v non son quelle di w: $(\det C)\,{}^tC^{-1}(u \times v) = (Cu) \times (Cv) \neq C(u \times v)$! quindi in $\mathbf{R}^3$ i *campi* di 2-vettori si identificano con i campi di vettori ... con cautela;
3-*vettore semplice*=parellepipedi tridimensionali di egual volume orientati con egual giacitura= terne ordinate (u, v, w) di vettori (spigoli generatori) su uno stesso sottospazio tridimensionale in cui la matrice delle coordinate di una terna rispetto all'altra abbia determinante positivo eguale ad 1 nel caso non degenere.
In $\mathbf{R}^3$ un 3-vettore si identifica con un multiplo della terna di base canonica (cubo orientato positivamente), o di una di quelle ottenute per uno scambio (cubo orientato negativamente); quindi si identifica con il numero (0-vettore) che è il cubo del fattore di molteplicità: $\det(u, v, w)$, il "volume con segno". In $\mathbf{R}^3$ i *campi* di 3-vettori si identificano con le funzioni ... .

Oggetti orientati che misurano:

1-*covettore*, misura i vettori=*funzione lineare a valori reali* $\sim$ *vettore "moltiplicatore"*
grazie al sistema di coordinate canonico si identifica una funzione lineare L con la matrice $1 \times n$ ad essa associata $a = (a^1, \dots, a^n)$ e quindi l'1-covettore L con l'1-vettore v associato ad a. La misura di un vettore u, identificato con le coordinate $b = (b^1, \dots b^n)$, fatta da L sarà la lunghezza, relativa all'unità di misura $|a|^{-1}_{\mathbf{R}^n}$, della proiezione di b su a: $L(u) = \langle a \cdot b\rangle$.
Campi di 1-covettori $\sim$ funzioni a valori vettori. La misura di $u(x)$, campo di vettori, rispetto a un campo di covettori $L(x)$, sarà *intuitivamente* del tipo $\int \langle L(x) \cdot u(x)\rangle$ con l'integrale da interpretare in diverse maniere: *caso tipico* $u(x)$ orientazione data da un cammino semplice chiuso-regolare $x = x(s)$, s lunghezza d'arco, $u(P) = \dot{x}(x^{-1}(P))$: la misura sarà $\displaystyle\int_{[x],u} L = \int_{[x]} \langle L{\cdot}u\rangle\, ds$
2-*covettore (o* 2-*forma)*, misura i 2-vettori semplici (u, v) = *funzione bilineare antisimmetrica* $B(u, v)$ (*non cambia valore* su (u, v) e su (a, b) se rappresentano lo stesso 2-vettore semplice, e cambio segno su (v, u) ovvero tiene conto dell'ordine, dell'orientazione) $\sim$ matrici A antisimmetriche $B(u, v) = {}^t uAv$.
- I 2-*covettori semplici* si identificano con i 2-vettori semplici (U, V): intuitivamente corrispondono al calcolare *"l'area con segno"* della *proiezione del parallelogramma* generato da (u, v) sul piano generato da (U, V) con opportune *unità di misura* date da (U, V). In termini algebrici si definisce:

$$(U,V)[(u,v)] = \det\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}(u|v) = \det\begin{pmatrix} U^1 & \dots & U^n \\ V^1 & \dots & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \langle U\cdot u\rangle & \langle U\cdot v\rangle \\ \langle V\cdot u\rangle & \langle V\cdot v\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \langle (U\otimes V - V\otimes U)v\cdot u\rangle = \textit{ teorema di Cauchy-Binet } \mathrm{FT11} \ \sum_{i<j}\det\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}^{ij}\det(u|v)_{ij}$$

ove $U\otimes V \sim (U_iV^j)_{1\le i,\ j\le n}$, per cui $U\otimes Vv = U\langle V\cdot v\rangle$.

- In $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ le uniche applicazioni bilineari antisimmetriche, cfr. FT10, sono del tipo

$$B(u,v) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right\rangle = \det\begin{pmatrix} a & u_1 & v_1 \\ b & u_2 & v_2 \\ c & u_3 & v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]\right\rangle = a(u_2v_3-u_3v_2)+b(v_1u_3-v_3u_1)+c(u_1v_2-u_2v_1),$$

cioè *combinazioni lineari delle "aree con segno" dei parallelogrammi orientati ottenuti proiettando sui piani coordinati* il parallelogramma $su+tv$, $0\le s,\ t\le 1$. *In* $\mathbf{R}^3$ *i 2-covettori e quindi i 2-vettori sono tutti semplici* e *ancora si identificano con vettori* moltiplicatori.

Pertanto in modo biunivoco ad ogni vettore H di coordinate (a,b,c) è associata un 2-covettore tramite la matrice antisimmetrica soprascritta: $\mathcal{A}(H)$. Applicando ciò ad un prodotto vettore:

$$\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B & \alpha C \\ \beta A & \beta B & \beta C \\ \gamma A & \gamma B & \gamma C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A & \gamma A \\ \alpha B & \beta B & \gamma B \\ \alpha C & \beta C & \gamma C \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\otimes(ABC) - \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\otimes(\alpha\,\beta\,\gamma).$$

In particolare si riottiene una dimostrazione di Cauchy-Binet in $\mathbf{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \left\langle \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]\right\rangle$$

- La misura di una campo $(u(x),v(x))$ di 2-vettori, rispetto ad un campo $(U(x),V(x))$ di 2-covettori sarà del tipo $\int \det\begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix}(u(x)|v(x))$. In $\mathbf{R}^3$ caso tipico di misura, tramite un 2-covettore identificato con un vettore $H=(a(x,y,z),b(x,y,z),c(x,y,z))$, di un campo di 2-vettori: $((u_1(x,y,z),u_2(x,y,z),u_3(x,y,z)),(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z))) \sim u\times v$, è:

$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial s}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}o\Phi^{-1},\ v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\left(\Phi^{-1}(x,y,z)\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}o\Phi^{-1}$$

$$N = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial s}o\Phi^{-1}\times\frac{\partial\Phi}{\partial s}o\Phi^{-1}}{\left|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_3} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial s}o\Phi^{-1}\times\frac{\partial\Phi}{\partial s}o\Phi^{-1}}{\sqrt{\det\text{Prima forma Fondamentale}}},$$

ove $\Phi : D \to \mathbf{R}^3$, è una superficie parametrica regolare in senso forte, cfr. FT 14, con $m_2(\partial D)=0$, Φ^{-1} definita sul sostegno sulla parte interna $\Phi(D^o)$. Nel caso la misura di $u\times v$ relativa ad H è $\int_{\Phi(D)}\langle H\cdot N\rangle\, ds_2 = \int_D \left\langle H(\Phi(s,t))\cdot\left[\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}(s,t)\right]\right\rangle dsdt.$

Orientazione

Dimensione 1: versori tangenti. - Un'orientazione di $V \subseteq \mathbf{R}^n$ varietà 1-dimensionale (regolare a tratti), connessa, è una delle due sue parametrizzazioni, γ, per lunghezza d'arco.
- Nel caso di varietà C^1 connesse compatte ciò equivale a dare un campo di vettori tangenti $\tau : V \to S^{n-1}$ continuo lungo V: $\tau(p) = \dot\gamma(\gamma^{-1}(p))$.
- Se la V è di "più pezzi staccati" un'orientazione è la scelta di un'orientazione per ogni "pezzo".

Dimensione 1 nel piano: versori normali. - In $\mathbf{R}^2$ ciò è equivalente a scegliere un campo $\nu : V \to S^1$ normale a V e continuo lungo V.
Usualmente data l'orientazione tangente $\tau(x,y)$ si sceglie l' *orientazione normale associata* ν in modo che $(\nu\,\tau)$ sia concorde con la base canonica: $\det(\nu\,\tau) = 1 > 0$.

Frontiere di aperti: versori normali. - Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$ è un aperto regolare con frontiera C^1 a pezzi (cfr. FT 14, 16) si dice orientazione positiva di ∂A la scelta di $\nu_e : \partial^1 A \to S^{n-1}$, $\partial^1 A$ è l'insieme dei punti di frontiera C^1 regolari, per cui $\nu_e(p)$ è il vettore normale esterno ad A in $p \in \partial^1 A$. Con tale orientazione la frontiera si indica con $\partial^+ A$. La scelta di $-\nu_e = \nu_i$ si dirà orientazione negativa: $\partial^- A$.
- Se per $p \in \partial^1 A$ localmente A è sottolivello regolare, nel senso del teorema del Dini, (cfr. FT 15) di G allora $\nu_e(p)$ è il versore di $\nabla G(p)$.

Orientazione agli estremi di cammini orientati. In particolare se $A = (a;b) \subseteq \mathbf{R} \sim \mathbf{R} \times \{0\}$ è orientato nel verso positivo da $\tau \equiv 1 \sim (1,0)$, agli estremi a e b si associano i pesi (orientazioni) rispettivamente $-1 \sim (-1,0) = \nu_e(a)$ ed $1 \sim (1,0) = \nu_e(b)$ (versori esterni). Analogamente si orientano gli estremi del sostegno di cammini regolari in senso forte non chiusi.

Orientazione di frontiere nel caso del piano. - Se $n = 2$ la frontiera ∂A sarà 1-dimensionale costituita dall'unione dei sostegni di cammini C^1 a tratti, chiusa senza bordo.
La scelta di orientare positivamente ∂A con la normale ν_e si traduce nella scelta di orientare i pezzi della frontiera con un campo di versori tangenti τ in modo che $\det(\nu_e\,\tau) = 1 > 0$ (orientazione tangente positiva). Tale parametrizzazione di ∂A si indica con $\partial^+ A$.
- Intuitivamente ciò corrisponde a percorrere il bordo di A (nel verso di τ) con la testa "all'insù" (verso $(0,0,1)$) in modo che A rimanga "a sinistra". Rispetto all'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^2$ alcuni pezzi di frontiera saranno percorsi in "senso antiorario", altri in "senso orario".
Esempio: - A definito da $1 < x^2+y^2 < 4$: l'orientazione tangente positiva fa percorre $x^2+y^2 = 4$ in senso antiorario, l'altro pezzo $x^2+y^2 = 1$ viene percorso in senso orario.
- A definito da $x^2 < y < x^2+1$ l'orientazione tangente positiva fa percorre $y = x^2+1$ in "senso orario" e $y = x^2$ in "senso antiorario".

Varietà bidimensionali nello spazio tridimensionale, orientazione normale:
- **caso regolare:** una sottovarietà regolare (con bordo o meno) V in $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 si dice orientabile se esiste $N : V \to S^2$ campo di vettori normali *continuo lungo* V.
Le frontiere di aperti regolari di $\mathbf{R}^3$ sono 2-varietà orientabili: $N \equiv \nu_e$ o $N \equiv -\nu_e$.
- **caso C^1 a pezzi:** con altro approccio si può dire in generale che se $V \subseteq \partial A$, A aperto regolare di $\mathbf{R}^3$ con frontiera C^1 a pezzi, allora è orientabile.
- Si noti che *la frontiera di un aperto regolare* è una varietà *completa senza bordo.*

- Non tutte le due varietà di $\mathbf{R}^3$ sono orientabili. Il tipico esempio è il nastro di Moebius M sostegno di $\Psi(u,v) = \Big((2 - v\sin\dfrac{u}{2})\sin u, (2 - v\sin\dfrac{u}{2})\cos u, v\cos\dfrac{u}{2}\Big)$,
$-1 \le v \le 1,\ 0 \le u \le 2\pi$, $D = [0;2\pi] \times [-1;1]$. Pur essendo una varietà con bordo e sostegno di una superficie regolare in senso forte, non è sostegno di una superficie con bordo, e non è orientabile. È iniettiva solo ristretta a $U = (0;2\pi) \times [-1;1]$ ma $\Psi(0,v) = (0,2,v) = \Psi(2\pi,-v)$, e $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}(0,v) \times \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}(0,v) = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}(2\pi,-v) \times \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}(2\pi,-v)$.

Indicata con Φ la restrizone iniettiva $\Psi|U$, si ha che Φ^{-1} definita su $\Psi(U) = M\backslash(\{(0,2)\} \times [-1;1])$ non si può estendere con continuità ad M. Se vi fosse un'orientazione $N : M \to S^2$ continua:
o per tutti i $p \in \Psi(U)$ $N(p) = \widehat{\frac{\partial\Psi}{\partial u}(\Phi^{-1}(p)) \times \frac{\partial\Psi}{\partial v}(\Phi^{-1}(p))}$
o per tutti i $p \in \Psi(U)$ $N(p) = -\widehat{\frac{\partial\Psi}{\partial u}(\Phi^{-1}(p)) \times \frac{\partial\Psi}{\partial v}(\Phi^{-1}(p))}$.
In entrambi i casi, con $p(u) = \Phi(u, 1)$ e $q(u) = \Phi(2\pi - u, -1)$, per $u \to 0^+$ si ottiene che p e q avrebbero lo stesso limite $(0, 2, 1)$, ma $N(p)$ ed $N(q)$ due limiti diversi.

Osservazione: - Un'altra classe di varietà bidimensionali nello spazio cartesiano tridimensionale, orientabili sono i sostegni di superfici parametriche Φ semplici regolari in senso forte per cui Φ^{-1} risulti continua: $N = \pm\widehat{\frac{\partial\Phi}{\partial u} o\Phi^{-1} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} o\Phi^{-1}}$. E.g. le *superfici parametriche con bordo regolare a tratti.*

Esercizio: un luogo di zeri regolare in ogni suo punto, di f:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, C^1, è orientabile.

Teorema. in generale una 2-sottovarietà in $\mathbf{R}^3$ compatta senza bordo è sempre orientabile.

Equivalenza orientata: due superfici parametriche $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, $\Psi : \Delta \to \mathbf{R}^3$, equivalenti, ($\Psi = \Phi o\Gamma$, $\Gamma : \Delta \to C$ diffeomorsimo con $D\Gamma$ invertibile), si dicono *equivalenti con orientazione* se $\det D\Gamma > 0$. Cioè i vettori normali dati dalle rispettive parametrizzazioni son multipli positivi un dell'altro: $\frac{\partial\Psi}{\partial p} \times \frac{\partial\Psi}{\partial q} = \det D_{p,q}\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$.
- *Non si assume* per tale nozione che il comune sostegno sia *orientabile.*

Integrali orientati: flussi e lavoro

Flussi attraverso superficie parametrica - Se $\Phi : D \to \mathbf{R}^3$, $D = \overline{D^o} \subseteq \mathbf{R}^2$ è una superficie parametrica C^1 "a pezzi", e $v(x, y, z)$ un campo, si dice *flusso* di v attraverso Φ, qualora sia ben definito, l'integrale: $\int_D \left\langle v\,(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u, v) \right\rangle dudv \;=: \int_\Phi v.$

Flussi attraverso cammini piani - Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \to \mathbf{R}^2$ è un cammino C^1 a tratti, e sia $\Theta : I \to \mathbf{R}^2$ è il vettore normale dato dalla velocità ruotata in senso orario di $\frac{\pi}{2}$: $\Theta = (\gamma_2', -\gamma_1')$. Sia $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ un campo. Se definito si dice *flusso* di v attraverso γ: $\int_I \langle v(\gamma(t)) \cdot \Theta(t)\rangle\, dt \;=\; \int_\gamma (-v_2, v_1) = \int_I \langle(-v_2(\gamma(t)), v_1(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)\rangle\, dt,$
ovvero l'integrale, cf. FT 7, lungo il cammino del campo ruotato in senso antiorario di $\frac{\pi}{2}$.

Flussi geometrici- Sia $V \subseteq \mathbf{R}^3$ una varietà (C^1 a pezzi) bidimensionale orientata dal campo di versori normale N, e sia H un campo. Se definito l'integrale si dice *flusso* di H attraverso (V, N):

$$\int_V \langle H \cdot N\rangle\, ds_2 \;=: \int_{V,\,N} H.$$

- Sia $V \subseteq \mathbf{R}^2$ una varietà (C^1 a tratti aperti) di dimensione 1, orientata dal campo di versori tangente τ, sia ν il versore ortogonale a τ con $\det(\nu\,\tau) = 1$, e sia $H = (H_1, H_2)$ un campo bidimensionale. Se definito si dice *flusso* di H attraverso (V, ν) l'integrale di linea:

$$\int_V \langle H \cdot \nu\rangle\, ds \;=\; \int_{V,\,\tau} (-H_2, H_1),$$

ovvero il lavoro lungo (V, τ) del campo ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

Osservazione: - per due superficie parametriche equivalenti, il flusso non cambia se e solo se le due parametrizzazioni sono equivalenti con orientazione. *Se cambia, cambia per il segno.*
- In particolare i flussi geometrici di campi attraverso varietà orientate dipendono dall'orientazione: *cambiando l'orientazione cambia il segno del flusso.*

Orientazione indotta sul bordo

Caso monodimensionale: se V è il sostegno di una cammino regolare a tratti con bordo (estremi) $\{P,\, Q\}$, orientato da τ da P a Q, *l'orientazione indotta sul bordo* è:

$\nu_e(P) = -1 \sim -\tau$, $\nu_e(Q) = 1 \sim \tau$, gli estremi così orientati si denotano con $b^{\tau+}V$

Caso bidimensionale: Se V è una varietà bidimensionale C^1 a pezzi con bordo bV C^1 a tratti in $\mathbf{R}^3$, orientata da N, si dice orientazione indotta (positiva) da N su bV una sua parametrizzazione C^1 a tratti aperti, e su questi regolare, con versore tangente τ per cui:

per ogni $p \in bV$ ove il bordo sia regolare, se H è tangente a V in p ed esterno si abbia $\det(H\,\tau\,N) > 0$. In particolare se $H = \nu_{Te}$ è il verso tangente esterno normale al bordo si ha $\det(\nu_{Te}\,\tau\,N) = 1$

Tale parametrizzazione del bordo si indica con $b^{N+}V$ o semplicemente con b^+V.

-Questa nozione generalizza quella vista per le frontiere regolari a tratti di aperti del piano. Corrisponde quindi a percorrere (nella direzione τ) il bordo di V con la testa "all'insù" (verso N) in modo che V rimanga "a sinistra".

Proposizione. Sia $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$ una superficie bidimensionale parametrica con bordo regolare a tratti. Sia τ è l'orientazione tangente positiva di ∂C.

$$\text{Se } N = \widehat{\frac{\partial \Phi}{\partial u} o \Phi^{-1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}} o \Phi^{-1} \text{ allora } b^{N+}\Phi(C) = \Phi(\partial^+ C).$$

Dimostrazione: siano $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ e $\nu_e = (\tau_2, -\tau_1)$ sono le orientazioni tangente e normale (esterna) positive di ∂C: $\det(\nu\,\tau) = 1$. Si ha nei punti $(u,v) \in \partial C$:

$D\Phi\tau$ è tangente a $b\Phi(C) =: \Phi(\partial C)$ in $\Phi(u,v)$, e (cfr. FT 14, 16) $D\Phi\nu_e$ è tangente a $\Phi(C)$ in $\Phi(u,v)$ ed esterno (anche se non necessariamente un versore normale al bordo).

$$D\Phi\tau = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{pmatrix} = \tau_1\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \tau_2\frac{\partial \Phi}{\partial v} \qquad\qquad D\Phi\nu = \nu_1\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \nu_2\frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

$$D\Phi\nu \times D\Phi\tau = (\nu_1\tau_2 - \nu_2\tau_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

Quindi $\det\left(D\Phi\nu\;D\Phi\tau\;\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|^2_{\mathbf{R}^3} > 0.$

<u>Osservazione:</u> il risultato è locale. Se $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^3$ è solo C^1 e p è di frontiera C^1 regolare, $D\Phi(p)$ di rango massimo, $\Phi(p) \in b\Phi(C)$, si ha $\det(D\Phi(p)\nu(p)\,, D\Phi(p)\tau(p)\,, N(p)) > 0$.

<u>Osservazione:</u> - se si considera $\mathbf{R} \sim \mathbf{R} \times \{0\} \subseteq \mathbf{R}^2$ orientato nel verso positivo da 0 a 1, vista in $\mathbf{R}^2$, tale orientazione tangenziale è data al versore costante $\tau = (1,0)$, e corrisponde a quella normale data dal versore $\nu = (0,-1)$.

Ovvero, con l'ulteriore identificazione $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbf{R}^3$, considerando invece l'orientazione $N = (0,0,1)$ sul semipiano $P = \{(x,y,0) : y \geq 0\}$, $\tau \sim (1,0,0)$ corrisponde all'orientazione positiva indotta su $bP = \{(x,0,0) : x \in \mathbf{R}\} \sim \mathbf{R}$: cioè $\nu = \nu_e^P \sim (0,-1,0)$.

Proposizione. - Se due varietà, orientate rispettivamente da N e da N', hanno in comune solo un pezzo C unidimensionale dei loro bordi, affinchè l'unione delle due varietà sia orientata dal versore definito su l'una da N e sull'altra da N', deve essere che le orientazioni indotte su C da N e da N' siano opposte.

<u>Osservazione:</u> - Per definizione di orientazione indotta agli estermi del sostegno di un cammino, quando si uniscono i sostegni di due cammini orientati se i versori indotti nell' estremo di contatto sono opposti le due orientazioni danno un'orientazione dell'unione.

- Similmente se si costruisce una varietà deformando una varietà con bordo, orientata da N, in modo da far coincidere un pezzo di bordo C unidimensionale con un'altro pezzo di bordo E unidimensionale, affinchè il risultato si orientabile le orientazioni indotte da N su C e su E devono essere opposte.

Operatori differenziali notevoli

Gradiente: data $f = f(x_1, \dots, x_n)$ funzione differenziabile in $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice *gradiente* di f il campo di vettori che esprime il differenziale mediante il prodotto scalare. In coordinate

$$\operatorname{grad} f \;=\; \nabla f \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Divergenza: dato $v = v(x_1, \dots, x_n)$ campo C^1 in $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice *divergenza* di v la funzione a valori *reali*: $\quad \operatorname{div} v \;=\; \nabla \cdot v \;=\; \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}.$

Rotore: dato $v = v(x, y, z)$ campo C^1 in $A \subseteq \mathbf{R}^3$ si dice *rotore* di v il campo:

$$\operatorname{rot} v \;=\; \nabla \times v \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Rotore piano: dato $v = (v_1, v_2) = v(x, y)$ campo C^1 in $A \subseteq \mathbf{R}^2$ si dice *rotore piano* di v la terza componente del rotore del campo $V(x, y, z) = (v_1, v_2, 0)$: $\qquad \operatorname{rot}_2 v \;=\; \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y}.$

0-vettori$\sim$funzioni $\xrightarrow[\text{grad}]{\nabla}$ vettori $\xrightarrow[\text{rot}]{\nabla\times}$ 2-vettori$_{u,v}$ $\sim$ vettori$_{u\times v}$ $\xrightarrow[\text{div}]{\nabla\cdot}$ 3-vettori $\sim$ funzioni

Indicando con $D\,v$ la matrice jacobiana del campo di vettori v in $\mathbf{R}^3$ e con $\nabla\, v$ la sua trasposta, con colonne i gradienti delle funzioni componenti di v, si ha:

$${}^t D\, v - Dv = \nabla\, v - D\, v = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} - \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} - \dfrac{\partial v_3}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \;=\; \mathcal{A}(\operatorname{rot} v).$$

Condizioni necessarie a) $\quad$ rot grad $\;=\; \nabla \times \nabla \;\equiv\; 0_{\mathbf{R}^3}$. $\quad$ b) $\quad$ div rot $\;=\; \nabla \cdot \nabla \times \;\equiv\; 0.$

Osservazione - Sui campi C^2 si tratta di una verifica diretta che segue dal teorema di scambio dell'ordine di derivazione.
- Come enunciato per domini semplicemente connessi, e provato completamente per domini stellati, cfr. FT 23, la condizione a) risulta anche sufficiente perché un campo sia integrabile cioè sia il gradiente di una funzione.
- Analogamente, senza altre condizioni, la condizione b) non è sufficiente per dire che un campo è il rotore di un altro campo. Esempio tipico è il campo gravitazionale, cf. FT 23:

$$v(x, y, z) = (v_1, v_2, v_3) \;=\; -KM \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Se N è la normale esterna alla palla unitaria di centro l'origine l'integrale sulla sfera unitaria di $\langle v \cdot N \rangle \equiv -KM$ è negativo. Se v fosse un rotore, teorema di Stokes, cfr. pagg. seguenti, essendo la sfera una varietà compatta senza bordo, l'integrale dovrebbe essere nullo. D'altronde

$\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} - 3\dfrac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right)$, $\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\left(x^2+y^2+z^2-3y^2\right)$, $\dfrac{\partial v_3}{\partial z} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\left(x^2+y^2+z^2-3z^2\right)$

Come caso dei campi chiusi, vi sono condizioni geometriche (topologiche) sui domini che garantiscono che un campo a divergenza nulla, *indivergente*, sia il rotore di un altro campo.

Potenziale vettore. Un campo w è un *potenziale vettore*, di v in A se $v = \operatorname{rot} w$ in A.

Osservazione: i potenziali vettori di un campo *non sono unici*: se due campi *differiscono per un campo gradiente hanno lo stesso rotore.* Vi è maggior libertà di scelta rispetto a i potenziali scalari che con ugual gradiente differiscono sui connessi solo per una costante.

Superficialmente connesso. Si dice che un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^3$ è *superficialmente connesso* se ogni varietà bidimensionale connessa compatta *senza bordo* contenuta in A si "deforma con continuità ad un punto rimanendo in A".

Superficialmente semplice. Un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^3$ connesso si dice *superficialmente semplice* se ogni varietà bidimensionale connessa compatta *senza bordo* contenuta in A coincide con la frontiera in $\mathbf{R}^3$ di una aperto interamente contenuto in A.

Teorema. a- Un campo indivergente in un aperto semplicemente connesso e superficialmente connesso ha potenziale vettore.

b- Sia A aperto limitato, superficialmente semplice. Un campo indivergente è un rotore.

- Un caso particolare che dà una ricetta operativa per trovare potenziali vettori, è la seguente:

Proposizione Un campo indivergente in un parallepipedo, cartesiano, ha potenziale vettore.

Dimostrazione: dato $v = (A, B, C)$ indivergente su Ω parallelepipedo si tratta di trovare $w = (U, V, W)$ per cui:

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z} = A \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x} = B \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = C \end{cases}$, avendo libertà si impone $W \equiv 0$ o altro: $\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = A(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = B(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = C \end{cases}$

2) Si fissa $(a,b,c) \in \Omega$, ed essendo Ω cartesiano integrando lungo segmenti cartesiani

$$\begin{cases} -V(x,y,z) + V(x,y,c) = \displaystyle\int_c^z A(x,y,z)dz \\[2ex] U(x,y,z) - U(x,y,c) = \displaystyle\int_c^z B(x,y,z)dz \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = C \end{cases}, \begin{cases} V(x,y,z) = -\displaystyle\int_c^z A(x,y,z)dz + V(x,y,c) \\[2ex] U(x,y,z) = \displaystyle\int_c^z B(x,y,z)dz + U(x,y,c) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = C \end{cases}$$

3) Imponendo altre condizioni per semplificare, *e.g.* $U(x,y,c) \equiv 0$, $V(a,y,c) \equiv 0$, derivando e sostituendo nella terza equazione: $-\displaystyle\int_c^z \frac{\partial A}{\partial x}(x,y,z)dz + \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,c) - \int_c^z \frac{\partial B}{\partial y}(x,y,z)dz = C(x,y,z)$, ed essendo V indivergente $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,c) = C(x,y,z) - \displaystyle\int_c^z \frac{\partial C}{\partial z}(x,y,z)dz = C(x,y,c)$, integrando in x, e tenendo conto di $V(a,y,c) \equiv 0$: $V(x,y,c) = \displaystyle\int_a^x C(x,y,c)dx$. Per cui

$$w(x,y,z) = \left(\int_c^z B(x,y,z)dz\,,\ -\int_c^z A(x,y,z)dz + \int_a^x C(x,y,c)dx\,,\ 0 \right)$$

Osservazione: - si può provare, usando i così detti nuclei integrali singolari, che se $\Omega = \mathbf{R}^3$ e v è un campo indivergete, che sia "abbastanza sommabile" insieme alle sue derivate, allora un potenziale vettore è dato da $w(x,y,z) = w(p) \; = \; \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\mathrm{rot} v(q)}{|p-q|_3}\, dadbdc\ , \quad q=(a,b,c).$

- Come esercizio, cfr. FE 13 Es.16, e FT 25, si prova che se Ω è *stellato* rispetto ad un suo punto, per esempio *l'origine*, analogamente al lemma di Poincaré per i campi chiusi, si ha che un potenziale vettore è: $\qquad w(p) \; = \; \displaystyle\int_0^1 t\cdot v(tp)\times p\, dt \; = \; \int_0^1 t\cdot v(tp)\times \frac{d\, t\cdot p}{dt}\, dt.$

Teorema di Stokes e teorema della divergenza

Caso geometrico

Paradigma: $$\int_{V,\,N} dF \; = \; \int_{b^+V} F \qquad .$$

Variando la natura della varietà V e dell'orientazione N, correttamente interpretando, di volta in volta, l'operatore differenziale "d", si ottengono gli apparentemente diversi enunciati.

Integrazione per parti su segmenti orientati:

- se $V = \overline{I} \subseteq \mathbf{R}^2$, $I = (a;b)$ intervallo aperto *limitato*: V è da interpretare come varietà *unidimensionale* con bordo $bV = \partial I = \{a,b\}$;

- come orientazione tangente di V si sceglie $\tau \equiv 1 \sim (1,0)$, considerando $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$, l'orientazione normale è $N = \nu \equiv (0,-1)$, quella indotta sul bordo $\{a,\, b\}$ è $b^{\tau+}V = \partial^+ I$;

- dato una funzione F, C^1 su V (considerato come 0-covettore che conta i punti con un peso), *si pone* $d\,F \; = \; F'$ (considerato come 1-covettore che misura gli elementi orientati di lunghezza): $\displaystyle\int_a^b F'\, dx \; = \; \int_{V,N} F' \; = \; \int_{b^+V} F = \int_{\partial^+(a;b)} F = F(b) - F(a).$

Teorema di Stokes nel piano cartesiano:

- se $V = \overline{A} \subseteq \mathbf{R}^2$, $A = A^o \subseteq B_R(0,0)$ aperto *limitato*, regolare con frontiera C^1 a tratti di lunghezza finita: V è da interpretare come varietà *bidimensionale* con bordo $bV = \partial A$;

- se si pensa $\mathbf{R}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$, l'orientazione di V è $N \equiv (0,0,1)$, e quella tangenziale indotta sul bordo è $b^{+,N}V = \partial^+ A \sim \tau$, corrispondente a quella data dalla normale esterna ν_e in modo che $\det\,(\nu_e\, \tau) = 1$;

- dato un campo F, C^1 su V (come 1-covettore che misura gli elementi orientati di lunghezza), *si pone* $d\,F = \; \mathrm{rot}_2\, F$ (come 2-covettore che misura gli elementi orientati d'area):
$$\int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \; = \; \int_{V,N} \mathrm{rot}_2 F \; = \; \int_{b^+V} F = \int_{\partial^+ A} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\partial A} \langle F\cdot \tau\rangle_2\, ds.$$

Teorema della divergenza nello spazio cartesiano tridimensionale:

- se $V = \overline{A} \subseteq \mathbf{R}^3$, $A = A^o \subseteq B_R(0,0,0)$ *limitato*, regolare con frontera C^1 a pezzi (*e.g.* unione finita di domini normali) di area finita: V è da interpretare come 3-varietà con bordo $bV = \partial A$;
- se si pensa $\mathbf{R}^3 \subseteq \mathbf{R}^4$, in analogia a quanto si fa per $\mathbf{R}^2$, l'orientazione di V è $N \equiv (0,0,0,1)$, e quella indotta sul bordo è $b^{+,N}V = \partial^+ A \sim \nu_e$;
- dato un campo F, C^1 su V (considerato come 2-covettore che misura gli elementi d'area orientati bidimensionali), *si pone* $d\,F = \; \mathrm{div}\, F$ (considerato come 3-covettore che misura gli elementi orientati di volume):
$$\int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dxdydz \; = \; \int_{V,N} \mathrm{div} F \; = \; \int_{b^+V} F = \int_{\partial A} \langle F\cdot \nu_e\rangle_3\, ds_2.$$

Terorema. Sia F indivergente. Se due varietà bidimenisonali compatte senza bordo (quindi orientabili) connesse contenute in A sono deformabili l'una nell'altra rimanendo in A (e mantenendo le orientazioni) allora i flussi di F attraverso di esse sono eguali.
- Una prima idea intuitiva della dimostrazione si ha quando una delle due è "circondata" e disgiunta dall'altra. La regione "spazzata dalla deformazione" le dovrebbe avere come gli unici due pezzi della sua frontiera, e con normali esterne "opposte".

Teorema di Stokes per sottovarietà compatte chiuse orientate bidimensionali nello spazio tridimensionale:

- se $V \subseteq \mathbf{R}^3$, è un varietà *compatta* bidimensionale C^1 a pezzi con bordo C^1 a tratti di lunghezza finita, *eventualmente vuoto*;

- se $N = (N_1, N_2, N_3)$ è una sua orientazione normale, τ l'orientazione tangenziale indotta sul bordo $b^{N+}V$, (se ν_e il versore tangente esterno normale al bordo $\det(\nu_e\, \tau\, N) = 1$);

- dato un campo F, C^1 su V (come 1-covettore che misura gli elementi orientati di lunghezza), *si pone* $d\,F =$ rot F (come 2-covettore che misura gli elmenti orientati d'area):

$$\int_{V,N} \text{rot}\, F \quad = \int_{V,\,N} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \;=$$

$$= \int_V \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) N_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) N_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) N_3\right] ds_2 \;=$$

$$= \quad \int_{b^+V} F \quad = \quad \int_{b^+V} F_1 dx + F_2 dy = \int_{bV} \langle F \cdot \tau \rangle_2\, ds.$$

<u>Osservazione:</u> qualora V sia una varietà compatta senza bordo, essendo il bordo vuoto si avrà: $\displaystyle\int_V \langle\ \text{rot}\, F \cdot N\rangle_3\ ds_2 \;=\; 0.$

- Altrimenti: se due varietà orientate (V, N) e (W, N') hanno lo stesso bordo orientato

$$\int_{V,\,N} \text{rot}\ \ F = \int_{W,\,N'} \text{rot}\ \ F.$$

<u>Osservazione:</u> come si espone nel seguente paragrafo, un analogo del teorema vale per superficie parametrica anche non regolare e non semplice. Si perde però l'interpretazione geometrica sul sostegno: sia per quanto riguarda il bordo sia per quanto riguarda gli integrali superficiali essendo permesse cancellazioni e sovrapposizioni.

Campi solenoidali: - un campo *continuo* si dice *solenoidale* se ha flusso nullo attraverso le varietà ccompatte senza bordo. Ovvero ha flussi eguali su varietà orientate compatte che inducano la stessa orientazione sul bordo in comune.

Corollario a Stokes: i rotori sono solenoidali (oltre che indivergenti).

Corollario al teorema della divergenza: a- Un campo solenoidale C^1 è indivergente.
b- Un campo C^1 indivergente su un aperto superficialmente semplice è solenoidale.

<u>Osservazione:</u> - il campo gravitazionale di un punto è indivergente ma non è solenoidale, quindi non è un rotore, cfr. paragrafo "Condizioni necessarie".
- Il teorema che garantisce un potenziale vettore su un limitato superficialmente semplice per un campo indivergente, è quindi conseguenza del seguente non immediato teorema:

Teorema. Un campo solenoidale su A aperto, limitato, con ∂A costituito da un numero finito di chiusi disgiunti è un rotore.

Teorema della divergenza nel piano cartesiano:

Questo enunciato si può vedere sia come equivalente del teorema di Stokes nel piano sia come analogo del teorema della divergenza nello spazio tridimensionale. L' ultimo punto di vista è in un certo senso più corretto.

Con le notazioni del teorema di Stokes in $\mathbf{R}^2$, ma diversa interpretazione del campo, si ha:
$$\int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{V,N} \operatorname{div}F = \int_{b^+V} (-F_2,F_1) = \int_{\partial^+A} -F_2dx+F_1dy = \int_{\partial A} \langle F\cdot \nu_e\rangle \, ds.$$
Non è che l'applicazione del torema di Stokes al campo ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario: $(-F_2,F_1)$. Ma l'interpretazione risulta così ostica. Invece identificando (F_1,F_2) con $\hat{F} = (F_1,F_2,0)$ interpretato come 2-covettore che misura aree, e $d\hat{F} = \operatorname{div}(F_1,F_2,0)$ come 3-covettore che misura volumi, integrando su $\hat{A} = A\times[0;1]\subseteq \mathbf{R}^3$, con normale esterna $\hat{\nu}_e = (\nu_e,0)$ per $0<z<1$ sulla parte verticale della frontiera e, sulle parti orizzontali, $\hat{\nu}_e = (0,0,-1)$ per $z=0$, $\hat{\nu}_e=(0,0,1)$ per $z=1$, applicando il teorema nello spazio si ha:
$$\int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{A\times[0;1]} \left(\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial y}+\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial z}\right) dxdydz \;=\; \int_{\partial(A\times[0;1])} \langle \hat{F}\cdot\hat{\nu}_e\rangle_3 ds_2 =$$
$$= \int_0^1\!\!\int_{\partial A} \langle F\cdot\nu_e\rangle ds\, dz + \int_A \langle (F_1,F_2,0)\cdot(0,0,\pm1)\rangle_3 ds_2 \;=\; \int_{\partial A} \langle F\cdot\nu_e\rangle\, ds.$$

Formulazioni equivalenti.

Nelle ipotesi e notazioni del teorema della divergenza nello spazio, con $\nu_e = ((\nu_e)_1,(\nu_e)_2,(\nu_e)_3)$ si hanno i seguenti asserti ad esso equivalenti, e gli analoghi nel piano.

Formule di Gauss-Green:
$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dxdydz = \int_{\partial A} f(\nu_e)_1\, ds_2,\quad \int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdydz = \int_{\partial A} f(\nu_e)_2\, ds_2,\quad \int_A \frac{\partial f}{\partial z}\, dxdydz = \int_{\partial A} f(\nu_e)_3\, ds_2.$$
Integrazione per parti: se F è un campo vettoriale ed f una funzione:
$$\int_A \langle F\cdot\nabla f\rangle\, dxdydz \;=\; -\int_A (\operatorname{div}F)\, f \;+\; \int_{\partial A} f\langle F\cdot\nu_e\rangle_3\, ds_2.$$
Formule per il Laplaciano: definito l'operatore, differenziale lineare del secondo ordine, di Laplace $\triangle\varphi \;=\; \operatorname{div}(\nabla\varphi) \;=\; \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}$, si ha:
$$\int_A f\triangle g\, dxdydz \;=\; -\int_A \langle\nabla f\cdot\nabla g\rangle\, dxdydz \;+\; \int_{\partial A} f\frac{\partial g}{\partial\nu_e}\, ds_2,$$
$$\int_A (f\triangle g - (\triangle f)g)\, dxdydz \;=\; \int_{\partial A} \left(f\frac{\partial g}{\partial\nu_e} - g\frac{\partial f}{\partial\nu_e}\right) ds_2,$$
<u>Osservazione:</u> - l'operatore di Laplace ha molteplici interpretazioni fisiche, dall'elettrostatica ed elettromagnetismo alla meccanica e fluidodinamica.
- La sua caratteristica matematica è esser l'unico operatore differenziale che coinvolge le derivate seconde che sia invariante rispetto a cambiamenti di coordinate ortonormali.
Ovvvero se R è una matrice ortogonale (${}^tR = R^{-1}$) di un cambiamento di coordinate $x=Ry$ in $\mathbf{R}^n$, considerando $f=f(x)$, denotando $\tilde{g}(y) = g(Ry)$, per ogni funzione $g=g(x)$, si ha $\widetilde{\triangle_x f} = \triangle_y\tilde{f}$. La verifica è elementare. Invece è più articolato mostrare che questa proprietà caratterizza il Laplaciano. Non deve sorprendere la cosa in quanto $\triangle f = \operatorname{tr}Hf$.

Caso parametrico

Sia $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, una superficie parametrica C^1, $C = \overline{C^o} \subseteq \mathbf{R}^2$ connesso *limitato*, C^o aperto regolare con ∂C regolare a tratti, descritto con la sua orientazione positiva dai cammini chiusi C^1 a tratti di lunghezza finita, $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$. Sia $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo C^1, e $\tilde{F} = F_o\Phi$, allora (per le ipotesi fatte la misura bidimensionale di $\Phi(\partial C) = 0$):

$$\begin{aligned}\int_\Phi \operatorname{rot} F &= \int_\Phi \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \\ &= \int_C \left\langle (\operatorname{rot} F)\left(\Phi(u,v)\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\rangle_3 dudv =\end{aligned}$$

$$= \int_{\Phi(\partial^+ C)} F = \int_{\Phi(\partial^+ C)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle F(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot D\Phi(\gamma^i(t)){\gamma^i}'(t)\right\rangle_3 dt =$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle \nabla\Phi(\gamma^i(t)) F(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot {\gamma^i}'(t)\right\rangle_2 dt = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma^i} \left\langle \tilde{F} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{F} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle_3 dv =$$

$$= \int_{\partial^+ C} \left\langle \tilde{F} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{F} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\rangle_3 dv =$$

$$= \int_{\partial^+ C} \nabla\Phi \tilde{F}.$$

<u>Osservazione:</u> - come già osservato, nel caso parametrico, senza ipotesi, si perde l'interpreta zione geometrica sul sostegno. La supericie può non esser regolare e non esser semplice. Sia per quanto riguarda l'eventuale bordo del sostegno che senza ipotesi sulla parametrizzazione è scorrelato dall'immagine della frontiera del dominio. Sia per quanto riguarda gli integrali superficiali essendo permesse cancellazioni e sovrapposizioni.

- D'altra parte sostegni che presentano singolarità, come i coni, vengono così compresi.

- Un eventuale "bordo fisico" di una unione di sostegni di superficie paramterica potrebbe non esser quello giusto per applicare il teorema di Stokes parametrico. Si possono infatti creare dei bordi "interni multipli" ove vi siano intersezioni delle immagini delle frontiere dei domini.

<u>Osservazione:</u> - nei casi concreti dal caso parametrico segue il caso geometrico, scomponendo la varietà orientata in pezzi che siano sostegni di superfici parametriche con bordo.

Riguardo al teorema della divergenza nella pratica ci si riduce ad unioni di domini normali.

Dimostrazione del teorema della divergenza per unioni di domini normali

0 - Per semplicità si tratta il caso bidimensionale, quello tridimensionale analogo.

1- Basta dimostrare le formule di Gauss-Green in quanto l'integrale della divergenza non è che la somma di due integrali di derivate parziali.

2- Per additività dell'integrale "solido", e poichè le normali esterne in un punto interno alla parte di frontiera comune a due domini normali con interni disgiunti sono opposte, ci si riduce a semplici domini normali (cancellazione degl integrali sui tratti comuni delle frontiere).

3- Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ normale, *e.g.* rispetto al primo asse coordinato, con funzioni $\phi,\ \psi \in C^1[a;b]$:

$$A = \{(x,y) :\ \phi(x) < y < \psi(x),\ a < x < b\},\ \partial A = \left\{\begin{array}{cc} \{(x,\phi(x)) :\ a \le x \le b\} & = L_1 \\ \cup & \\ \{(b,y) :\ \phi(b) \le y \le \psi(b)\} & = L_2 \\ \cup & \\ \{(x,\psi(x)) :\ a \le x \le b\} & = L_3 \\ \cup & \\ \{(a,y) :\ \phi(a) \le y \le \psi(a)\} & = L_4 \end{array}\right.$$

L'orientazione positiva $\partial^+ A$ è data per esempio da: $\gamma_1(t) = (t, \phi(t)),\ a \le t \le b$ per L_1, $\gamma_2(t) = (b, \phi(b) + t(\psi(b) - \phi(b))),\ 0 \le t \le 1$ per L_2, $\gamma_3(t) = \ominus(t, \psi(t)),\ a \le t \le b$ per L_3, $\gamma_4(t) = (a, (1-t)(\psi(a) - \phi(a)) + \phi(a)),\ 0 \le t \le 1$ per L_4.

($\bullet$) La normale esterna sui lati verticali L_2 ed L_4 è rispettivamente $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ con seconda componente nulla, e sui grafici L_1 ed L_3 è rispettivamente $\dfrac{(\phi'(t), -1)}{|\gamma_1'(t)|_2}$ e $\dfrac{(-\psi'(t), 1)}{|\gamma_3'(t)|_2}$.

-2.1: primo caso $\displaystyle\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdy = \int_a \frac{\partial f}{\partial y}\, dydx = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right] dx = \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, \phi(x))]\, dx,$

d'altronde per $\bullet$ si ha $\displaystyle\int_{\partial A} f(\nu_e)_2\, ds \ = \ \int_{L_1} f(\nu_e)_2\, ds \ + \ \int_{L_3} f(\nu_e)_2\, ds \ =$

$$= \int_a^b f((t, \phi(t)) \cdot (-1)\, dt \ + \ \int_a^b f(t, \psi(t)) \cdot 1\, dt = \int_a^b [f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))]\, dt.$$

- 2.2: secondo caso $\displaystyle\int_A \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdy = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}\, dydx = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}\, dy\right] dx \ =$

poichè $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} g(x, y)dy\right] = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}\, dy + g(x, \psi(x))\psi'(x)dx - g(x, \phi(x))\phi'(x),$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} g(x, y)\, dy\right] dx - \int_a^b g(x, \psi(x))\psi'(x)dx + \int_a^b g(x, \phi(x))\phi'(x)dx =$$

$$= \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} g(b, y)\, dy - \int_{\phi(a)}^{\psi(a)} g(a, y)\, dy - \int_a^b g(x, \psi(x))\psi'(x)dx + \int_a^b g(x, \phi(x))\phi'(x)dx = (\bullet)$$

$$= \int_{L_2} g \cdot (\nu_e)_1 ds + \int_{L_1} g \cdot (\nu_e)_1 ds + \int_{L_3} g \cdot (\nu_e)_1 ds + \int_{L_4} g \cdot (\nu_e)_1 ds = \int_{\partial A} g \cdot (\nu_e)_1 ds.$$

Deduzione del teorema di Stokes nello spazio dal teorema nel piano

Nel seguito fissata una superficie parametrica $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, $\Phi = \Phi(u, v)$, per una funzione $F = F(x, y, z)$ definita sul sostegno di Φ, si indica con $\tilde{F} = \tilde{F}(u, v)$ la funzione:

$$F_o\Phi(u, v) = F\,(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)).$$

0- Si prova il teorema parametrico.

- Questo include in particolare il caso geometrico in cui la varietà è sostegno di una sola superficie parametrica regolare con bordo $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, per cui si ha:

$$\int_\Phi \operatorname{rot} V = \int_{\Phi(C)} \operatorname{rot} V, \text{ e } \int_{\Phi(\partial^+ C)} V = \int_{b^+\Phi(C)} V.$$

Include inoltre il caso di varietà compatte senza bordo immagine di una superficie regolare (in senso debole) semplice, *e.g. la sfera*, $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, per cui si abbia che una parte di ∂C abbia come immagine un numero finito di punti e le rimanenti, ove Φ non sia iniettiva, hanno immagini percorse in senso opposto rispetto all'orientazione $\partial^+ C$. Quindi: $\displaystyle\int_{\Phi(\partial^+ C)} V = 0.$

- Come in precedenza osservato, usando la cancellazione degli integrali sui bordi comuni a due pezzi, si estende al caso di varietà regolari a pezzi orientabili e in particolare al caso di varietà chiuse orientabili e varietà chiuse con bordo vuoto.

1- Si può inoltre supporre che la superficie parametrica $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, $C = \overline{C^o} \subseteq \mathbf{R}^2$ connesso limitato, C^o aperto regolare con frontiera C^1 a tratti di lunghezza finita, *sia* $C^2(C)$.

Questo perchè si può approssimare una $\Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^3$ funzione C^1 e *anche le sue derivate prime* con una successione di funzioni $C^2(C)$, $\Phi_n : C \to \mathbf{R}^3$, $n \in \mathbf{N}$, con convergenza puntuale dominate delle Φ_n e $D\Phi_n$ per $n \to \infty$ rispettivamente a Ψ e $D\Psi$ (anzi convergenza uniforme). Quindi, dato un campo V, avendo la desiderata uguaglianza per la superficie approssimante

$$\int_C \left\langle \widetilde{\operatorname{rot} V} \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_n}{\partial u} \right\rangle_3 dudv = \int_{\partial^+ C} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial u} \right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} \right\rangle_3 dv,$$

passando al limite sotto segno di integrale per $n \to \infty$ si ottiene quanto desiderato:

$$\int_C \left\langle \widetilde{\operatorname{rot} V} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right\rangle_3 dudv = \int_{\partial^+ C} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right\rangle_3 dv.$$

2- Sia quindi data $\Phi : C \to \mathbf{R}^3$, superficie $C^2(C)$, con $C = \overline{C^o} \subseteq \mathbf{R}^2$ connesso *limitato*, C^o aperto regolare con ∂C regolare a tratti, descritto con la sua orientazione positiva dai cammini chiusi regolari a tratti $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$. Sia $V = (V_1, V_2, V_3)$ un campo (come 1-covettore), C^1 in un aperto contenente l'immagine $\Phi(C)$ di Φ. Partendo dall'immagine $\partial^+\Phi$ dei cammini che orientano ∂C, usando la convenzione $\nabla\Phi = {}^t D\Phi$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(\partial^+ C)} V = \int_{\Phi(\partial^+ C)} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle V(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot \frac{d}{dt}\left(\Phi(\gamma^i(t))\right) \right\rangle_3 dt = \\
&= \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle V(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot D\Phi(\gamma^i(t)){\gamma^i}'(t) \right\rangle_3 dt = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle \nabla\Phi(\gamma^i(t)) V(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot {\gamma^i}'(t) \right\rangle_2 dt = \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{\gamma^i} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 dv = \int_{\partial^+ C} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 du + \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 dv = \int_{\partial^+ C} \nabla\Phi\tilde{V}
\end{aligned}$$

usando il teorema di Stokes su C nel piano per il campo $\nabla\Phi\tilde{V} \sim \left(\left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3, \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 \right)$, poichè, per il teorema di Schwarz di scambio dell'ordine di derivazione, si ha:

$$\operatorname{rot}_2 \nabla\Phi\tilde{V} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}\tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 + \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right\rangle_3 - \left\langle \frac{\partial}{\partial v}\tilde{V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 - \left\langle \tilde{V} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right\rangle_3 = \\
&= \left\langle \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 - \left\langle \frac{\partial \tilde{V}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 = \left\langle \widetilde{DV} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle_3 - \left\langle \widetilde{DV} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 = \\
&= \left\langle \widetilde{{}^t DV} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 - \left\langle \widetilde{DV} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle_3 = {}^t \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left(\widetilde{{}^t DV} - \widetilde{DV} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \\
&= \left\langle \widetilde{\operatorname{rot} V} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi(\partial^+ C)} V &= \sum_{i=1}^k \int_0^1 \left\langle V(\Phi(\gamma^i(t))) \cdot \frac{d}{dt}\left(\Phi(\gamma^i(t))\right) \right\rangle_3 dt = \int_C \operatorname{rot}_2 \nabla\Phi\tilde{V}\, dudv &= \\
&= \int_C \left\langle (\operatorname{rot} V)(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\rangle_3 dudv &= \int_\Phi \operatorname{rot} V\ .
\end{aligned}$$

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] pagg. 259-265;

[B] pagg.529-570;

[F] pagg. 39-401, 573-579, 581-590.