MOTI DI ROTAZIONE E DI ROTOTRASLAZIONE

Fino ad ora ci siamo occupati solamente della descrizione di moti di TRASLAZIONE di un corpo solido, cioè di quei moti in cui tutti i punti del corpo si spostano della stessa quantità in un dato tempo. In tal caso, quindi, è sufficiente conoscere lo spostamento $\vec{S}(t)$ di un solo punto del corpo solido, ad esempio il centro di massa. Tutti gli altri punti, infatti, sono caratterizzati dallo stesso spostamento $\vec{S}(t)$. In tal caso, il corpo solido può essere schematizzato come un punto materiale e il suo moto è interamente descritto dalle leggi di Newton. Un esempio di moto puramente traslatorio è schematizzato, ad esempio in figura 1.

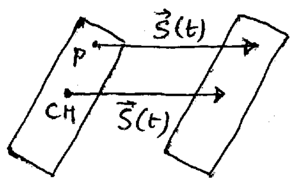


figura 1

Come è evidente dalla figura, lo spostamento del centro di massa (CM) e del punto P sono uguali.

In generale, però, un corpo rigido può anche ruotare mentre trasla. In tal caso non è sufficiente conoscere di quanto si è spostato il centro di massa ~~per~~ per sapere di quanto si sono spostati gli altri punti del corpo. Dunque, la I° EQUAZIONE CARDINALE della dinamica che descrive il moto del centro di massa non è più sufficiente ma, come vedremo, sarà necessario introdurre una nuova equazione (II° EQUAZIONE CARDINALE) che ci permetterà di descrivere il moto di rotazione del corpo. Per far ciò è necessario introdurre alcuni nuovi concetti che saranno descritti nel seguito. In figura 2 è mostrato schematicamente un generico moto di rototraslazione.

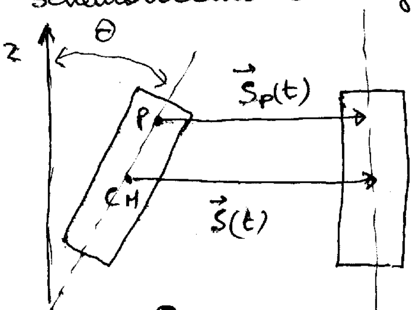


figura 2

Come risulta evidente dalla figura, lo spostamento $\vec{S}_p(t)$ del punto P è, ora, diverso dallo spostamento $\vec{S}(t)$ del centro di massa. Infatti, oltre a traslare il corpo ha anche ruotato e l'angolo θ che formava inizialmente con l'asse z è diventato pari a 0.

I.1 - Il prodotto vettoriale fra due vettori

Prima di introdurre i nuovi concetti che ci permetteranno di descrivere in modo completo il moto rototraslatorio, è necessario introdurre un nuovo tipo di prodotto fra vettori: IL PRODOTTO VETTORIALE. Avevamo già definito in precedenza il prodotto scalare $c=\vec{A}\cdot\vec{B}$ che associa ai due vettori uno scalare e che è pari a $c=AB\cos\theta$.

Il prodotto vettoriale, invece, associa ai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ un vettore, cioè una grandezza caratterizzata da tre parametri: lunghezza o modulo, orientazione e verso o, alternativamente, tre componenti cartesiane. Il prodotto vettoriale $\vec{C}$ di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica con il simbolo:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \qquad (1)$$

dove $\times$ indica l'operazione di prodotto vettoriale (per quello scalare si usava $\cdot$). Il prodotto vettoriale $\vec{C}$ è un vettore che gode delle seguenti proprietà:

1) La DIREZIONE di $\vec{C}$ è quella della retta che è perpendicolare sia al vettore $\vec{A}$ che a $\vec{B}$. Se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ vengono traslati (senza ruotare) finché le loro origini coincidono (vedi figura 3) allora i due vettori individuano uno ed un solo piano (il piano che li contiene entrambi). Ad esempio, nel caso rappresentato in figura, il piano è il piano xy. Poiché $\vec{C}$ deve essere ortogonale sia ad $\vec{A}$ che a $\vec{B}$, allora $\vec{C}$ DEVE ESSERE PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DAI DUE VETTORI (piano xy in figura).

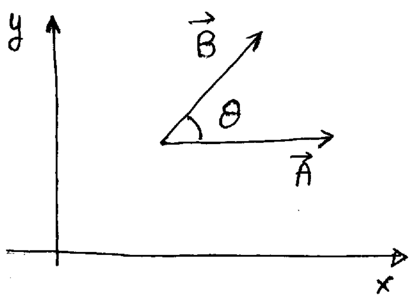


figura 3

Questa semplice regola permette di trovare facilmente l'orientazione del vettore $\vec{C}$ se sono noti i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

2) Il <u>VERSO</u> del vettore $\vec{C}$ si ottiene utilizzando la <u>REGOLA</u> <u>DELLA MANO DESTRA</u>: Si posiziona il palmo della mano parallelamente al <u>PRIMO</u> VETTORE che appare nel prodotto vettoriale ($\vec{A}$ in (1)). Dopodiché si posiziona il palmo in modo che chiudendo il palmo le dita si portino parallele al vettore $\vec{B}$ (il SECONDO vettore). Il verso in cui punta l'unghia del pollice corrisponde al verso del prodotto vettoriale $\vec{C}$ (vedi figura 4)

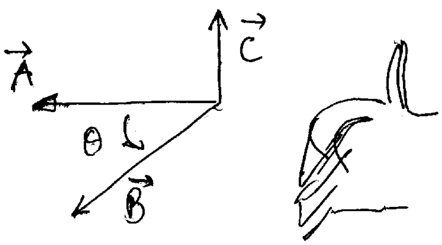


figura 4 a

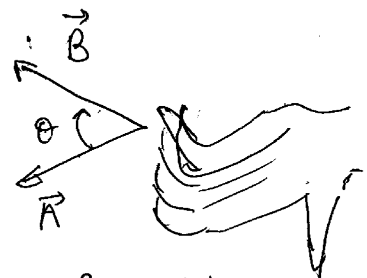


figura 4 b

<u>ATTENZIONE</u>! è importante ricordare che va usata la MANO <u>DESTRA</u>.

Domanda: Quale è la direzione e il verso del prodotto vettoriale dei vettori in figura 3? (è entrante o uscente dal piano del foglio?). Quale è il verso del vettore

$$\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A} \quad ?$$

3) <u>Il</u> <u>MODULO</u> del vettore $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ è

$$C = A B |\sin\theta| \qquad (2)$$

dove θ è l'angolo formato fra i due vettori. Si osservi la differenza con il prodotto scalare che dipendeva da $\cos\theta$. Dalla (2) si deduce che il prodotto vettoriale fra due vettori assume il massimo valore in modulo pari ad AB quando $\theta = \pi/2$ (i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari) ed è <u>NULLO</u> se i vettori sono paralleli ($\theta = 0$) o antiparalleli ($\theta = \pi$). Dunque, <u>vettori con la stessa orientazione</u> hanno un <u>prodotto vettoriale nullo</u>.

Il modulo del prodotto vettoriale è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica che è spesso utile. Infatti, con riferimento alla figura 5, si trova che $B|\sin\theta|$ è l'altezza del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ la cui area è, perciò,

$$\text{Area} = A\,B|\sin\theta| \qquad (3)$$

che è proprio uguale al MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

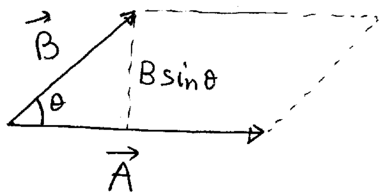


figura 5

Da ora in poi considereremo sempre sistemi di riferimento CARTESIANI <u>DESTRORSI</u> e tutto quello che troveremo nel seguito sarà sempre riferito a tali sistemi. Dunque, lo studente dovrà sempre fare attenzione ad utilizzare sistemi di riferimento DESTRORSI. Ricordiamo che un riferimento di assi Cartesiani x, y e z è detto DESTRORSO se il verso positivo dell'asse z che è individuato dal versore $\vec{k}$ si ottiene applicando la regola della mano destra ai versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ dell'asse x e dell'asse y. Tale sistema è mostrato in figura 6.

Risulta utile trovare i prodotti vettoriali fra i versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Poiché $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ sono versori (modulo = 1) e sono fra loro perpendicolari, il modulo del prodotto vettoriale fra due di essi (ad esempio $\vec{i}$ e $\vec{j}$) è

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\,|\sin\theta| = 1$$

essendo $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ e $|\sin\theta| = 1$

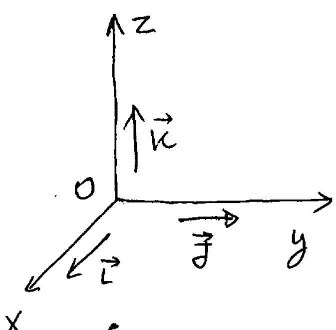


figura 6

Dunque, il prodotto vettoriale di due versori perpendicolari è, a sua volta un versore. Inoltre, per la proprietà (1), il prodotto vettoriale dovrà essere perpendicolare ai due vettori. Ad esempio, se consideriamo i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$, essi individuano il piano xy e, quindi, $\vec{i} \times \vec{j}$ dovrà essere diretto lungo l'asse z, cioè sarà uguale a $\vec{k}$ o $-\vec{k}$. Per sapere quale è il verso corretto basta applicare la regola della mano destra (proprietà 2)). In tal modo si trova che il verso è quello positivo dell'asse z, cioè $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Lo studente, per esercizio, dimostri le seguenti relazioni:

$$
\begin{array}{lll}
\vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\
\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\
\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0
\end{array}
\qquad (4)
$$

Le relazioni (4) sono molto utili per i calcoli.

Il prodotto VETTORIALE gode delle seguenti proprietà che possono essere dedotte dalla definizione:

A) Il prodotto vettoriale è <u>ANTICOMMUTATIVO</u>, cioè

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (5)$$

Dunque, quando si utilizza una grandezza definita come prodotto vettoriale di due vettori, è molto importante ricordare l'ordine nel quale devono apparire i due vettori nel prodotto.

Come per il prodotto scalare, anche per il prodotto vettoriale vale l'importante proprietà:

$$(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) \times (\lambda \vec{C} + \delta \vec{D}) = \alpha\lambda \vec{A} \times \vec{C} + \beta\lambda \vec{B} \times \vec{C} + \alpha\delta \vec{A} \times \vec{D} + \beta\delta \vec{B} \times \vec{C} \qquad (6)$$

Questa proprietà viene utilizzata spesso.

I.2 - ESPRESSIONE CARTESIANA DEL PRODOTTO VETTORIALE.

Come visto in precedenza, risulta utile usare la rappresentazione cartesiana ortogonale per rappresentare un vettore. In particolare, i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono rappresentati con le loro componenti:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \qquad (7)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + A_z \vec{k} \qquad (8)$$

Conseguentemente, anche il prodotto vettoriale $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ potrà essere rappresentato dalle sue componenti cartesiane:

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k} \qquad (9)$$

Vogliamo ora trovare come C_x, C_y e C_z sono legate alle componenti cartesiane dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Ma

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) =$$

$$= A_xB_x\, \vec{i}\cdot\vec{i} + A_xB_y\, \vec{i}\cdot\vec{j} + A_xB_z\, \vec{i}\cdot\vec{k} + A_yB_x\, \vec{j}\cdot\vec{i} + A_yB_y\, \vec{j}\cdot\vec{j} + A_yB_z\, \vec{j}\cdot\vec{k}$$
$$+ A_zB_x\, \vec{k}\cdot\vec{i} + A_zB_y\, \vec{k}\cdot\vec{j} + A_zB_z\, \vec{k}\cdot\vec{k} \qquad (10)$$

Tenendo conto delle relazioni (4), la (10) diventa

$$\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \qquad (11)$$

Dunque, le componenti del vettore $\vec{C}$ sono

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad (11)'$$

$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad (11)''$$

$$C_z = A_xB_y - A_yB_x \qquad (11)'''$$

OSSERVAZIONE: le (11)'..(11)''' sono molto utili e vanno ricordate a memoria.

Un caso che si trova spesso è quello in cui due vettori giacciono nel piano xy del foglio. Ma allora, come sappiamo, il prodotto vettoriale deve essere perpendicolare al piano xy, cioè lungo z. Infatti se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ giacciono nel piano xy, ciò significa che $A_z = 0$, $B_z = 0$. Si verifica immediatamente che $C_x = 0$, $C_z = 0$.

Esercizio 1: dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ giacenti nel piano xy e dati da $\vec{A} \equiv (1,2)$, $\vec{B} \equiv (2,2)$, si trovi il vettore $\vec{C}$ e il suo modulo.

Soluzione: poiché $\vec{A}$ e $\vec{B}$ giacciono nel piano xy, $\vec{C}$ è diretto lungo l'asse z e la sua componente lungo ~~z~~ è

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

Il vettore $\vec{C}$ è, perciò, diretto lungo l'asse z in verso negativo ed ha modulo pari a 2.

II - Il MOMENTO DELLA FORZA RISPETTO AD UN POLO.

Consideriamo una forza $\vec{F}$ che sia applicata in un punto P a distanza r da un punto O, detto POLO, come mostrato in figura 7. Sia $\vec{r}$ il vettore che congiunge il polo O con il punto P (nel verso che va da O a P).

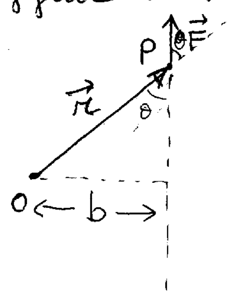


figura 7

Definiamo il MOMENTO DELLA FORZA $\vec{F}$ RISPETTO AL POLO O come il vettore:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (12)$$

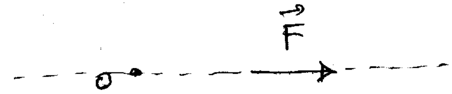
OSSERVAZIONE: poiché il prodotto vettoriale è anticommutativo, è importante che lo studente ricordi a memoria l'ORDINE con cui compaiono $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ nel prodotto.

Dalla definizione di prodotto vettoriale, sappiamo che il modulo di τ è

$$\tau = r F |\sin\theta| = F b \qquad (13)$$

dove b è la distanza del polo O dalla retta contenente la forza $\vec{F}$ (vedi figura 7) che viene detta RETTA D'AZIONE di $\vec{F}$. b viene detto "IL BRACCIO DELLA FORZA" rispetto ad O.

Come diretta conseguenza si deduce che $\tau = 0$ se $b = 0$, cioè se il polo O si trova sulla retta d'azione come mostrato qui sotto.



La direzione del vettore $\vec{\tau}$ è perpendicolare al piano individuato dai due vettori. Ad esempio, nel caso in figura 7, il vettore $\vec{\tau}$ è perpendicolare al foglio. Il verso è quello dato dalla regola della mano destra (nel caso in figura 7 è uscente dal foglio).

Esercizio 2 - 1) Usando la definizione lo studente dica in quale dei casi rappresentati in figura 8 il momento di forza è nullo.
2) Quale è la direzione e verso (uscente o entrante) nei vari casi?

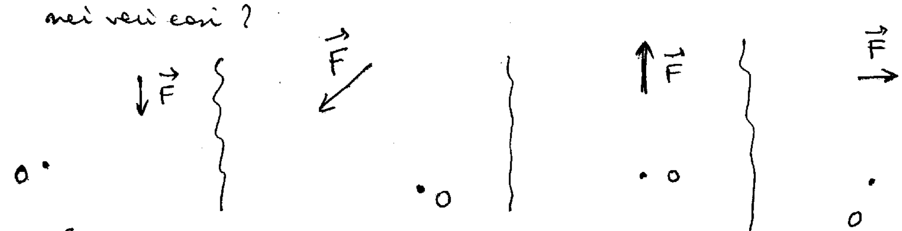


fig 8a   fig 8b   fig 8c   fig 8d

Risposte: 1) $\vec{\tau} = 0$ in 8c

2) 8a: entrante, 8b: uscente, 8c: nullo, 8d: entrante

Dalla definizione (12) si deduce che il momento di forza ha le dimensioni N x m, cioè si misura in JOULE (J) come il lavoro e l'energia.

È importante che lo studente tenga sempre presente che il momento di forza è sempre definito <u>rispetto ad un polo</u> O e il suo valore può cambiare notevolmente al variare del polo. In particolare, se il polo coincide con il punto di applicazione della forza, allora il braccio b risulta nullo e, quindi, il momento di forza è sempre nullo.

II.1 IL MOMENTO TOTALE DELLE FORZE AGENTI SU UN SISTEMA DI N CORPI

Supponiamo, ora, di avere un sistema di N corpi puntiformi di masse $m_1, \dots m_i, \dots m_N$. Si definisce il MOMENTO TOTALE DELLE FORZE RISPETTO AD UN POLO O come la somma VETTORIALE dei momenti di forza agenti su ciascun corpo. Se indichiamo con $\vec{F}_i$ la forza agente sull'i-esimo corpo $(i=1,\dots N)$ e $\vec{r}_i$ $(i=1,\dots N)$ il vettore che individua la posizione dell'i-esimo corpo rispetto al POLO O (vedi figura 9) si trova:

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (14)$$

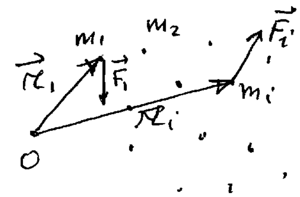


figura 9

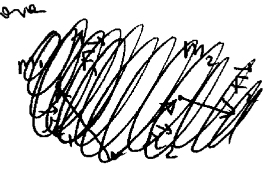
Nel caso della forza totale $\vec{F}_{tot}$ agente su un sistema di corpi, avevamo dimostrato una proprietà molto importante ~~della forza~~ che discendeva direttamente dal PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE: La forza totale $\vec{F}_{tot}$ è uguale alla somma delle sole forze esterne perché le forze interne si cancellano ~~a due~~ a due, cioè

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,est} = \vec{F}_{tot\,est}$$

Analogamente, il momento di forza totale $\vec{\tau}_{tot}$ è pari al momento delle forze esterne perché i momenti delle forze interne si annullano a due a due, cioè

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,est} + \cancel{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,int}} = \vec{\tau}_{tot\,est} \qquad (15)$$

Infatti, se consideriamo due corpi generici del sistema (ad esempio m_1 e m_2 in figura 10), si trova che il momento totale agente sui due corpi dovuto alle forze interne (forze di azione e reazione) si annulla).



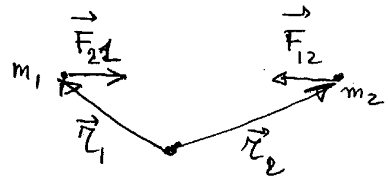


figura 10

Il momento totale è, infatti,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \qquad (16)$$

ma $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$ (principio AZIONE e REAZIONE)

dunque $\vec{\tau}$ in eq.(16) diviene

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_{12} \qquad (17)$$

dove $\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento che va dal punto in cui si trova la massa m_2 a quello in cui si trova m_1. Ma le forze fra corpi sono dirette lungo la congiungente i due corpi (vedi, ad esempio, l'interazione gravitazionale, l'interazione elettrostatica ecc...), dunque $\vec{F}_{12}$ e $\Delta\vec{r}$ sono vettori paralleli e, quindi

$$\vec{\tau} = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_{12} = 0 \qquad (18)$$

Questa proprietà vale per ogni coppia di corpi presenti nel sistema e quindi, tutti i momenti di forza interni si cancellano nella (15)

GENERALIZZAZIONE A SISTEMI CONTINUI. Consideriamo un corpo esteso di massa M. In tal caso, il corpo può essere pensato come somma di particelle microscopiche di volume dV infinitesimo. Il momento di forza rispetto al polo O agente sul piccolo volumetto di massa $dm = \rho\, dV$ sarà

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} \qquad (19)$$

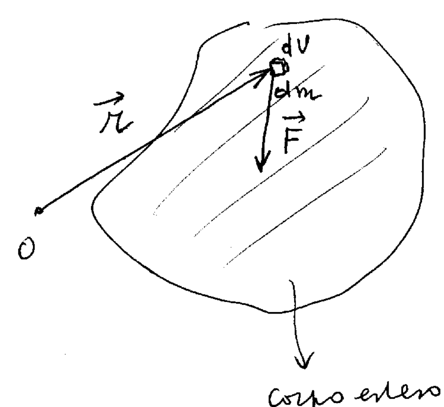


figura 11

dove $d\vec{F}$ è la forza infinitesima che agisce sul corpo. Il momento totale delle forze sarà, perciò,

$$\vec{\tau}_{tot} = \int \vec{r} \times d\vec{F}_{ext} \qquad (20)$$

ALCUNI CASI IMPORTANTI:

1 – LA COPPIA DI FORZE

Spesso le forze esterne sono costituite da due sole forze $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ uguali ed opposte ma applicate in due punti diversi. Ad esempio, si potrebbe avere una bacchetta ai cui estremi vengono applicate due forze uguali ed opposte. In tal caso si dice che nel sistema agisce una COPPIA DI FORZE. In tale sistema la forza totale è $\vec{F}_{tot} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$ mentre il momento di forza totale è (vedi figura 12)

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{r}_2 \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} = \Delta\vec{r} \times \vec{F} \quad (21)$$

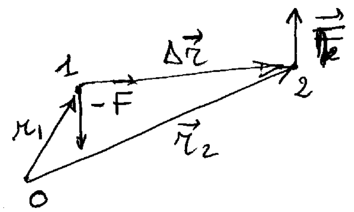


fig. 12

dove $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è il vettore che congiunge il punto 1 con il punto 2 (vedi figura). La proprietà importante della (21) è che il momento di forza $\vec{\tau}_{tot}$ dipende solo dalla forza $\vec{F}$ e dal vettore $\Delta\vec{r}$ che congiunge i punti in cui sono applicate le forze e NON DIPENDE dalla posizione del polo O. Qualunque sia il polo, il momento di forza ha sempre lo stesso valore! . Il modulo di $\vec{\tau}_{tot}$ è

$$\tau_{tot} = F \, \Delta r \, |\sin\theta| \quad (22)$$

dove θ è l'angolo compreso fra $\Delta\vec{r}$ ed $\vec{F}$ (vedi figura 13)

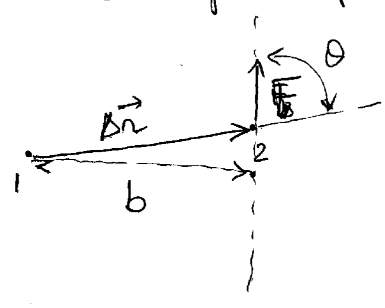


figura 13

ma $\Delta r \sin\theta$ è il braccio b mostrato in figura 13. Dunque il momento di forza di una coppia di forze è pari in modulo a

$$\tau_{tot} = F\, b \quad (23)$$

Domanda: nel caso di figura, qual è il verso di $\vec{\tau}_{tot}$? (risposta: uscente dal piano)

2 - IL MOMENTO DI FORZA DELLA FORZA PESO

In molti casi, ci troveremo a dover calcolare il momento di forza totale esercitato dalla forza peso su un sistema di corpi di massa m_1, m_2 .... m_N posizionati nei punti a distanza $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N$ da un polo O (vedi figura 14).

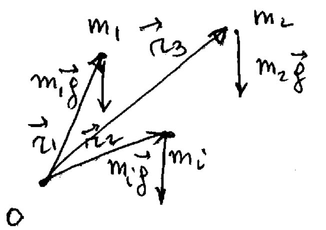


figura 14

Dalla definizione si trova:

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \dots + \vec{r}_N \times m_N\vec{g}$$

$$= m_1\vec{r}_1 \times \vec{g} + m_2\vec{r}_2 \times \vec{g} + \dots + m_N\vec{r}_N \times \vec{g}$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale, possiamo mettere in evidenza il vettore $\vec{g}$ nella somma e scrivere

$$\vec{\tau}_{tot} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N) \times \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} \quad (24)$$

ma dalla definizione del centro di massa, sappiamo che

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M_{tot}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = M_{tot}\vec{r}_{CM}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella 24 si ottiene

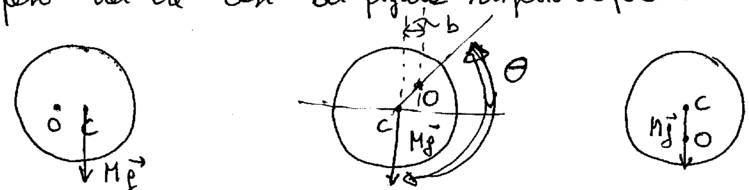
$$\vec{\tau}_{tot} = M_{tot}\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times M_{tot}\vec{g} \qquad (25)$$

La (25) ci dice che il momento totale applicato dalla forza peso sul sistema è esattamente lo stesso che si avrebbe se si avesse un unico corpo puntiforme di massa M_{tot} (massa totale del sistema) come se la massa fosse interamente concentrata nel centro di massa. Dunque PER CALCOLARE IL MOMENTO DI FORZA TOTALE AGENTE SU UN SISTEMA SI PUÒ SEMPRE ASSUMERE CHE LA FORZA TOTALE DI GRAVITÀ $\vec{P} = M_{tot}\vec{g}$ SIA APPLICATA NEL CENTRO DI MASSA.

Questa proprietà dovrà sempre essere applicata negli esercizi.

La proprietà precedente si generalizza immediatamente anche a sistemi di corpi continui come un mattone o una barra. Anche in questo caso il corpo può essere suddiviso idealmente in un numero infinito di particelle infinitesime e, dunque, il momento di forza totale è ancora equivalente a quello che si ottiene ammettendo che la forza peso totale sia applicata nel centro di massa.

Esempio: Consideriamo un disco omogeneo di raggio R e massa M che giace nel piano verticale ed è vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O a distanza $R/2$ dal centro. Si calcoli il momento di forza totale dovuto alla forza peso nei tre casi di figura rispetto al polo O



a) b) c)

caso a) ~~La~~ forza $M\vec{g}$ è applicata nel centro di massa C al centro del disco. Dalla figura si vede che il braccio della forza è $b = R/2$, dunque il modulo del momento di forza è $\tau = Mg\frac{R}{2}$. Il vettore $\vec{\tau}$ è perpendicolare al piano della figura che contiene i vettori $\overrightarrow{OC}$ e $M\vec{g}$. Utilizzando la regola della mano destra si deduce che $\vec{\tau}$ è ENTRANTE nel piano di figura.

caso b) Stavolta il braccio è minore di $R/2$ (vedi figura) ed è pari a $b = \frac{R}{2}|\sin\theta|$. Dunque

$$\tau = Mg\frac{R}{2}|\sin\theta|$$

Il vettore $\vec{\tau}$ è USCENTE dal piano di figura.

caso c) Il prolungamento del vettore forza passa per il polo O, dunque il braccio è nullo e il momento di forza è nullo

$$\vec{\tau} = 0$$

III – IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (O MOMENTO ANGOLARE) $\vec{L}$

Un altro concetto che, come vedremo, sarà estremamente utile per descrivere il moto rotatorio dei corpi è il concetto di momento angolare o momento della quantità di moto $\vec{L}$, rispetto ad un polo O. Data una particella puntiforme di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$, allora si definisce Momento angolare $\vec{L}$ rispetto al polo O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (26)$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che congiunge il polo con il punto in cui si trova il corpo e $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto della particella puntiforme. Il modulo di $\vec{L}$ è

$$L = r m v |\sin\theta| = m v b \qquad (27)$$

dove b è il braccio definito in figura 15.

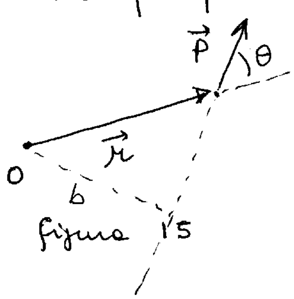


figura 15

Il momento angolare è, quindi, massimo quando la particella si muove perpendicolarmente al vettore $\vec{r}$ mentre è nullo se la particella si muove lungo $\vec{r}$. Dalla (27) si deduce, inoltre che il momento angolare ha le dimensioni

$$M\frac{L^2}{T}$$ e si misura, quindi in $Kg\ m^2/s$ = Joule x S

Come nel caso del momento delle forze, è importante rimarcare che il momento angolare dipende dal polo scelto. Dunque in entrambi i casi ogni volta che si utilizzerà il momento delle forze o il momento angolare si dovrà prima stabilire rispetto a quale polo lo si vuole calcolare!

Generalizzazione ad un sistema di corpi

Nel caso di un sistema di corpi puntiformi, di masse $m_1, m_2 \dots m_N$ aventi velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_N$ e posizionati a distanza $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N$ da un polo O, risulta utile introdurre il concetto di momento angolare totale $\vec{L}_{tot}$ che è definito da

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad (28)$$

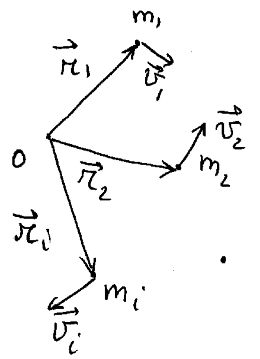


figura 16

Nel caso, invece, di un sistema continuo come, ad esempio un sasso, un barattolo ..., un fluido... In generale il corpo potrà essere suddiviso in elementi infinitesimi di massa dm che occupano un volumetto infinitesimo dV. Ciascun elemento si troverà ad una data distanza $\vec{r}$ dal polo O. Il momento angolare infinitesimo associato con tale elemento sarà, perciò,

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\, \vec{v} \qquad (29)$$

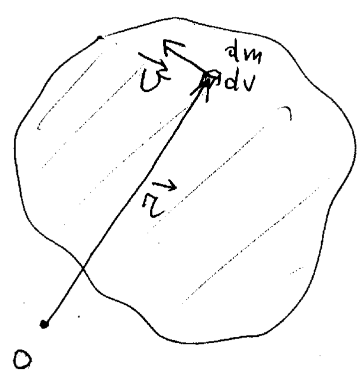


figura 17

dove $\vec{v}$ è la velocità dell'elemento considerato. Il momento angolare totale si otterrà, perciò, integrando tutti i momenti angolari infinitesimi, cioè:

$$\vec{L}_{tot} = \int \vec{r} \times dm\, \vec{v} \qquad (30)$$

dove $dm = \rho\, dV$ (ρ = densità) e dove l'integrale è esteso a tutti gli elementi di massa contenuti nel corpo esteso.

IV - LEGAME FRA MOMENTO DELLE FORZE E MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Come la forza $\vec{F}$ agente su un corpo e la sua quantità di moto $\vec{p}$ sono legati dalla legge fondamentale $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (II legge di Newton), così anche il momento di forza $\vec{\tau}$ rispetto ad un polo O fisso è legato al momento della quantità di moto $\vec{L}$ da una relazione analoga. Infatti,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (31)$$

d'altra parte

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (32)$$

ma $\vec{r}$ rappresenta il vettore che congiunge il punto generico P dove si trova il polo O e, quindi, se $\vec{R}_p$ e $\vec{r}_o$ sono i vettori posizione che individuano il punto P e il polo O rispetto all'origine O' degli assi (vedi fig. 18), risulta $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_o$. Dunque, se O è fisso ($\frac{d\vec{r}_o}{dt} = 0$), risulta $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_p}{dt}$. Ma $\frac{d\vec{r}_p}{dt}$ è il vettore velocità del punto P, dunque

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \qquad (33)$$

essendo nullo il prodotto vettoriale fra due vettori paralleli ($\vec{v}$ e $m\vec{v}$).
Sostituendo la (33) nella (32) si ottiene $\frac{d\vec{L}}{dt} = r \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ che coincide con il secondo membro della (31). Dunque, sostituendo questa espressione nella 31 si ottiene

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (34)$$

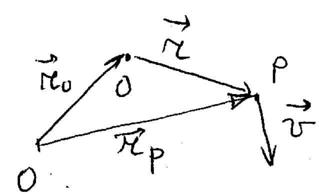


fig. 18

OSSERVAZIONE IMPORTANTE!

Per dimostrare la (34) abbiamo fatto uso del fatto che il polo O è fisso ($\frac{d\vec{r}_o}{dt} = 0$). In caso contrario, non è più vero che $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ma

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_p}{dt} - \frac{d\vec{r}_o}{dt} = \vec{v}_p - \vec{v}_o$$

dove $\vec{v}_p$ = velocità del punto P e $\vec{v}_o$ = velocità del polo. Dunque, lo studente deve sempre fare attenzione a scegliere un polo fisso O quando utilizza la relazione (34).

IV.1 - LA II° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI.

La relazione (34) è particolarmente importante se viene applicata ad un sistema. Consideriamo, ad esempio, un sistema di punti materiali di masse $m_1, m_2, \ldots m_N$ e velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_N$. Consideriamo, inoltre, un polo O FISSO. Il momento totale delle forze $\vec{\tau}_{tot}$ che, per quanto visto, è pari al momento totale delle sole forze esterne $\vec{\tau}_{tot\,est}$, è dato da:

$$\vec{\tau}_{tot_{est}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i \qquad (35)$$

dove $\vec{\tau}_{i\,est}$ è il momento di ~~forza~~ esercitato dalle forze esterne sulla particella di massa m_i. In base alla (34), $\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$, dove $\vec{L}_i$ è il momento angolare della i-esima particella. Dunque

$$\vec{\tau}_{tot_{est}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{L}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) \qquad (36)$$

Ma $\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$ è il momento angolare totale del sistema, dunque, la (36) si scrive nella forma generale

$$\vec{\tau}_{tot\,est} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} \qquad (37)$$

L'eq. (37) rappresenta la II° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI ed è di fondamentale importanza (insieme alla I° CARDINALE $\vec{F}_{tot\,est} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{tot}$) per lo studio del moto di sistemi di corpi. Si dimostra facilmente che la (37) vale anche per sistemi continui (corpi estesi) che possono sempre essere scomposti in un infinità di particelle infinitesime.

La II° EQUAZIONE CARDINALE è stata dimostrata a partire dalla (34) che vale solo per un polo O FISSO. In realtà, si può dimostrare che la (37) resta valida anche nel caso in cui il polo O utilizzato per il calcolo del momento totale delle forze $\vec{\tau}_{tot_{est}}$ e del momento angolare totale $\vec{L}_{tot}$

coincide con il centro di massa qualunque sia il moto del centro di massa. In conclusione, la II equazione cardinale può essere applicata SOLAMENTE nei due casi:

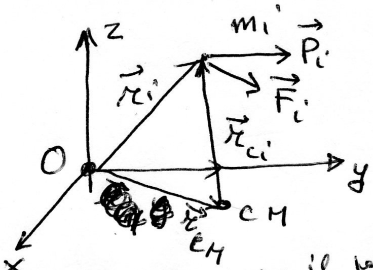
a) il polo è un PUNTO FISSO

b) il polo è il CENTRO DI MASSA

Nel seguito dimostreremo che la (37) continua a valere anche nel caso (b).

Dimostrazione:

Consideriamo il sistema di corpi puntiformi di masse $m_1, m_2, \dots m_N$ e un sistema di riferimento xyz con origine nel polo fisso O (vedi figura 18)



Vogliamo dimostrare che, se vale la II cardinale per il polo O allora essa vale anche per il polo nel centro di massa CM. La II^a cardinale, rispetto al polo O si scrive:

$$\vec{\tau}_{tot_{ext}} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \qquad (38)$$

dove

$$\vec{\tau}_{tot_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (39)$$

e

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \qquad (40)$$

dove $\vec{r}_i$ è il vettore che congiunge il polo O (origine degli assi xyz in figura 18) con il punto dove si trova la massa m_i e $\vec{v}_i$ è la velocità della massa m_i. Adesso, dobbiamo dimostrare che, se vale la (38) allora vale anche la relazione:

$$\vec{\tau}_{tot_{CM}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{tot_{CM}}\right) \qquad (41)$$

dove $\vec{\tau}_{tot_{CM}}$ è il momento totale delle forze rispetto al centro di massa CM (vedi figura 18) e $\vec{L}_{tot_{CM}}$ è il momento angolare totale delle quantità di moto rispetto al centro di massa, cioè:

$$\vec{\tau}_{tot_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{ci} \times \vec{F}_i \qquad (42)$$

dove $\vec{r}_{ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$ (vedi figura). Sostituendo questa espressione nella (42) si ottiene:

$$\vec{\tau}_{tot_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad (43)$$

ma $\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_{tot_{ext}}$ (eq. (38)) e $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{tot_{ext}}$. Dunque, la (43) diventa:

$$\vec{\tau}_{tot_{CM}} = \vec{\tau}_{tot_{ext}} - \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{tot_{ext}} \qquad (44)$$

D'altra parte, il momento totale delle quantità di moto rispetto a $\underline{\mathbf{XX}}$ CM è

$$\vec{L}_{tot_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{ci} \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad (45)$$

Il primo termine nell'ultimo membro a destra è $\vec{L}_{tot}$, mentre $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{P}_{tot}$, dunque la (45) diventa:

$$\vec{L}_{tot_{CM}} = \vec{L}_{tot} - r_{CM} \times \vec{P}_{tot} \qquad (46)$$

derivando entrambi i membri della (46) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot_{CM}} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times \vec{P}_{tot} - \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} \qquad (47)$$

ma la quantità di moto totale è legata alla velocità del centro di massa $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$ dalla relazione $\vec{P}_{tot} = M_{tot} \vec{v}_{CM}$, quindi il 2° termine ~~nel~~ membro a destra in eq. (47) è nullo perché il vettore $\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM}$ è parallelo a $\vec{P}_{tot} = M_{tot} \vec{v}_{CM}$ e, quindi, il prodotto vettoriale è nullo.
In definitiva, la (47) diventa:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot_{CM}} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} - \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} \qquad (48)$$

Sostituendo $\vec{\tau}_{tot_{CM}}$ di eq. (44) e $\frac{d\vec{L}_{tot_{CM}}}{dt}$ di eq. (48) nella (41) si ottiene

$$\vec{\tau}_{tot_{ext}} - \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{tot_{ext}} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} - \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} \qquad (49)$$

Ma, per la I^a cardinale, $\vec{F}_{tot_{ext}} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}$ e, quindi, i secondi termini nei membri a sinistra e a destra di eq. (49) sono uguali e si possono semplificare. L'equazione (49) diventa, perciò,

$$\vec{\tau}_{tot_{ext}} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \qquad (50)$$

che è la II equazione cardinale rispetto al polo fisso O.
Dunque, abbiamo dimostrato che, se vale la II^a cardinale, allora vale anche la (41), cioè la II^a equazione cardinale che avevamo dimostrato per un polo fisso O continua a valere per il centro di massa anche se questo si muove.