XXII - MOTI DI ROTAZIONE

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno ad un asse. Ad esempio, consideriamo un disco circolare che ruota attorno ad un asse z perpendicolare al disco e passante per il centro O. Per descrivere il moto di rotazione possiamo considerare un asse x' passante per O e solidale con il disco. Ciò significa che, quando il disco ruota, anche l'asse Ox' ruota con il disco (vedi figura 1). Se indichiamo con x un asse fisso (non rotante) che passa per O, allora la posizione istantanea di x' sarà individuata univocamente dall'angolo $\theta(t)$ che esso forma con x al generico istante t. L'angolo θ è espresso in RADIANTI e, quindi, per definizione è definito da $\theta = \frac{s}{r}$ dove s è l'arco di circonferenza che sottende l'angolo è r è il raggio della circonferenza (vedi figura 1).

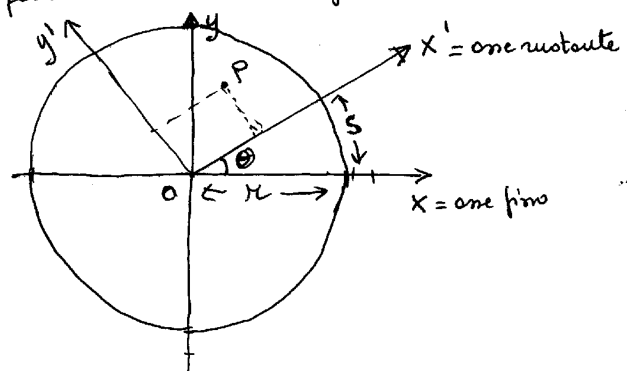


fig 1.

Ovviamente, se è noto l'angolo $\theta(t)$ che x' forma con x, allora è nota anche la posizione dell'asse cartesiano y' che è individuato dall'angolo $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Un generico punto P del disco ruota solidalmente con esso. Ciò significa che le sue coordinate x'_p e y'_p rispetto agli assi x' e y' restano fisse ad ogni istante. Dunque, la conoscenza dell'angolo $\theta(t)$ permette di conoscere la posizione di ogni punto P del corpo ad ogni istante. Dunque IL MOTO DI ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO ATTORNO AD UN ASSE È COMPLETAMENTE DESCRITTO DA UN SOLO PARAMETRO: L'ANGOLO $\theta(t)$.

Analogamente, il moto di traslazione di un corpo rigido lungo un asse x è completamente determinato dalla conoscenza della velocità istantanea della coordinata X_{CM} del centro di massa. Infatti, per un moto di traslazione, tutti i punti del corpo si spostano nello stesso modo.

<u>Definizione</u>: siano $\theta(t_i)$ e $\theta(t_f)$ gli angoli che individuano la posizione del corpo rigido ai tempi t_i e t_f. Si dice VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA nell'intervallo $[t_i, t_f]$ la grandezza:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1}$$

In analogia con quanto fatto per la velocità lineare, definiamo VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA al tempo t la grandezza

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{2}$$

la velocità angolare istantanea rappresenta, perciò, l'angolo spazzato nell'unità di tempo. Sia $\bar{\omega}$ che ω si misurano, perciò, in rad/s ed hanno le dimensioni di $\frac{1}{T}$.

In analogia con il moto traslatorio definiamo, perciò,
ACCELERAZIONE MEDIA NELL'INTERVALLO $[t_i, t_f]$:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega(t_f) - \omega(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (3)$$

e ACCELERAZIONE ISTANTANEA al tempo t:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (4)$$

$\bar{\alpha}$ e α si misurano in rad/s^2 (dimensione $\frac{1}{T^2}$).
Si osservi la totale analogia fra le definizioni di ω ed α e quelle di v e a per il moto di un corpo lungo un asse. Questa analogia dovrebbe aiutare lo studente a memorizzare tali definizioni.

In un corpo solido che ruota di un angolo $\Delta\theta$, tutti i punti del corpo compiono un'identica rotazione attorno all'asse di rotazione. Dunque, un generico punto P del corpo descrive un arco di circonferenza. Se il punto si trova a distanza r dall'asse di rotazione, la lunghezza dell'arco di circonferenza è $\Delta s = r\,\Delta\theta$ (discende direttamente dalla definizione di angolo in radianti). Ma allora:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \qquad (5)$$

Il vettore velocità $\vec{v}$ è tangente alla circonferenza e diretto nel senso del moto. Poiché tutti i punti di un corpo solido rotante ruotano della stessa quantità $\Delta\theta$ nello stesso intervallo di tempo Δt, ne deriva che ω e α sono le stesse per qualunque punto del corpo. Al contrario, dalla (5) si deduce che la velocità di un punto dipende dalla distanza dall'asse di rotazione se e CRESCE LINEARMENTE CON r. Lo stesso avviene per l'accelerazione a tangenziale che si ottiene dalla (5):

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \implies a = r\alpha \qquad (6)$$

le relazioni (5) e (6) sono molto importanti e devono essere ricordate a memoria.

Nelle lezioni precedenti riguardanti il moto di traslazione di un corpo, avevamo visto che, in generale, il moto di un corpo necessita la conoscenza del vettore spostamento $\vec{S}(t)$ ad ogni istante e, quindi, dei vettori velocità $\vec{v}(t)$ e accelerazione $\vec{a}(t)$ ad ogni istante. Analogamente, nel caso di un moto di rotazione, una descrizione completa ed esauriente può essere ottenuta solamente definendo un vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ e un vettore accelerazione angolare $\vec{\alpha}$. I vettori $\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ sono legati dalla relazione generale:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (7)$$

In effetti, il parametro valore ω non è sufficiente da solo a individuare un moto di rotazione. Se io dico che un corpo ruota con velocità angolare ω, infatti, la persona che mi ascolta non è in grado di capire effettivamente quale è il moto fatto dal corpo. Perché ciò che dico sia ben chiaro io dovrò aggiungere alla frase "il corpo ruota con velocità angolare ω" anche "attorno all'asse OO' nel verso ... ". Quindi, associato al moto di rotazione c'è un'orientazione (asse di rotazione) e un verso. Ma allora, la descrizione completa della velocità angolare si otterrà solamente ottenere definendo il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

Definizione: Il vettore velocità angolare è un vettore $\vec{\omega}$ il cui modulo rappresenta l'angolo (in valore assoluto) spazzato nell'unità di tempo, mentre l'orientazione è quella dell'asse di rotazione istantaneo (l'asse di rotazione può cambiare nel corso del tempo). Il verso del vettore $\vec{\omega}$ si ottiene utilizzando la seguente REGOLA DELLA MANO DESTRA: Si dispone il palmo della mano in modo da ruotare insieme al corpo con il pollice parallelo all'asse di rotazione. Il verso del vettore $\vec{\omega}$ è, quindi, individuato dal verso del pollice (vedi figura 2)

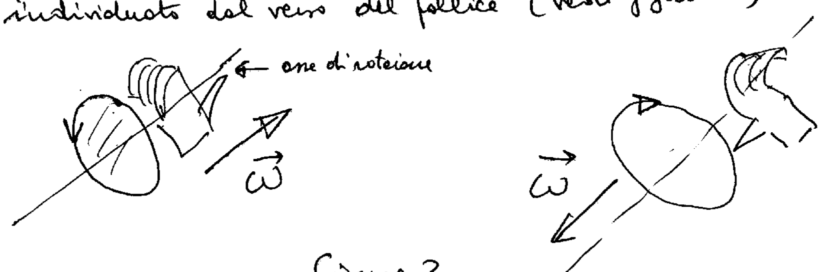


figura 2

La conoscenza del vettore $\vec{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ permette di determinare in modo univoco sia l'asse di rotazione, sia il verso di rotazione, sia il modulo ω della velocità angolare $\omega = \sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}$. Ad esempio, un corpo che ruota attorno all'asse z di un riferimento Cartesiano ortogonale destrorso è individuato dal vettore XXII (4)

$$\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega)$$

dove ω è la componente z di $\vec{\omega}$ ed è >0 se la rotazione è antioraria e <0 nel caso opposto

$\omega > 0$ a) figura 3 $\omega < 0$ b)

Una volta noto il vettore $\vec{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ risulta univocamente determinata la velocità di ogni punto del corpo solido. Consideriamo, ad esempio, un corpo solido che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'asse OO' in figura 3'. Un generico punto P appartenente al corpo ruota attorno all'asse OO' descrivendo una circonferenza di raggio R. Sia $\vec{r}$ il vettore posizione che individua la posizione di P rispetto ad un punto O nell'asse di rotazione. Il vettore velocità è tangente alla circonferenza descritta da P (vedi figura) ed ha modulo

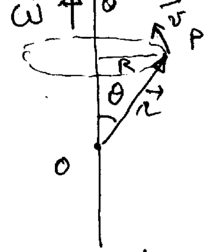


figura 3'

$$v = \omega R = \omega r \sin\theta$$

Si riconosce immediatamente che, inoltre, il vettore $\vec{v}$ è perpendicolare sia ad $\vec{r}$ che a $\vec{\omega}$, dunque la relazione precedente si scrive in forma vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (8)$$

La (8) è molto importante e va ricordata a memoria. È importante sottolineare che, poiché il prodotto vettoriale è anticommutativo, è importante anche ricordare l'<u>ordine</u> con cui $\vec{\omega}$ ed $\vec{r}$ appaiono nel prodotto vettoriale (8)

XXII.1 CINEMATICA DELLE ROTAZIONI

Consideriamo un corpo che ruota attorno ad un asse z di un sistema Cartesiano ortogonale <u>destrorso</u>: $\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega)$. Se il moto è antiorario, $\omega > 0$. Ma $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, dunque la convenzione adottata che $\omega > 0$ se il moto è antiorario implica che si deve assumere come verso positivo per l'angolo θ (verso in cui θ cresce) quello orario. Una volta noto $\theta(t)$, la velocità angolare $\omega(t)$ e l'accelerazione angolare $\alpha(t)$ si ottengono immediatamente utilizzando la (2) e (4).

Come nel caso del moto traslatorio, se è noto il valore di $\omega(t)$ e di $\alpha(t)$ ad ogni istante, allora è possibile conoscere il valore di $\theta(t)$ ad ogni istante purché siano note alcune CONDIZIONI INIZIALI. Infatti,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \omega\, dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{dt} dt \Rightarrow \theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\, dt \qquad (10)$$

Come nel caso del moto traslatorio, la conoscenza di $\omega(t)$ non è sufficiente per conoscere $\theta(t)$ ma è necessario conoscere l'angolo iniziale $\theta(t_0)$.
Analogamente, se è nota $\alpha(t)$, allora

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d\omega}{dt} dt \Rightarrow \omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt \qquad (11)$$

Dunque, se si conosce $\alpha(t)$, allora la velocità angolare $\omega(t)$ può essere ottenuta utilizzando la (11) purché si conosca la condizione iniziale $\omega(t_0)$. Una volta ottenuta $\omega(t)$, si calcola $\theta(t)$ utilizzando la (10).

MOTO DI ROTAZIONE UNIFORME: In questo caso la velocità angolare $\omega(t)$ è costante nel tempo : $\omega(t) = \omega_0$. Ne consegue che l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$. Dalla (10) si deduce immediatamente:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega_0 (t - t_0) \qquad (12)$$

cioè, l'angolo spazzato cresce linearmente nel tempo.

MOTO DI ROTAZIONE UNIFORMEMENTE ACCELERATO:
In questo caso, $\alpha(t) = \alpha_0 =$ costante. Dunque, dalla (11) si deduce

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha_0 (t - t_0) \qquad (13)$$

che, sostituita nella (10) fornisce

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\alpha_0}{2}(t - t_0)^2 \qquad (14)$$

Si noti la completa analogia fra le formule del moto uniformemente accelerato per un corpo che si muove di moto traslatorio lungo l'asse x e quelle del moto rotatorio uniformemente accelerato. In particolare, tutte le formule del moto rotatorio si ottengono a partire da quelle del moto traslatorio facendo le sostituzioni:

$$x \longrightarrow \theta \qquad (15)$$
$$v \longrightarrow \omega$$
$$a \longrightarrow \alpha$$

Si consiglia lo studente di tenere presente questa analogia per facilitare la memorizzazione delle varie formule.

Esempio! Si calcoli la velocità angolare media della terra nel suo moto di rotazione attorno all'asse e l'angolo di cui ruota la terra in un'ora. Si calcoli la velocità lineare di un corpo che si trova all'equatore dovuta al moto di rotazione della terra e la si esprima in Km/h.

Soluzione: la terra compie una rotazione completa ($\Delta\theta = 2\pi$) in un giorno ($\Delta t = 24h = 86.400 s$): Dunque

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400}\ rad/s = 7.27 \times 10^{-5}\ \frac{rad}{s} \qquad (16)$$

Poiché il moto di rotazione è uniforme, l'angolo spazzato in un tempo $\Delta t = 1h = 3600\ s$ è

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \frac{\pi}{12}\ rad = 15^\circ \qquad (17)$$

La velocità di un corpo all'equatore è pari, in modulo, a $v = \omega R$ dove $R = 6.4 \times 10^6 m$ è il raggio della terra. Dunque

$$v = \omega R = 465\ m/s = 1675\ \frac{Km}{h} \qquad (18)$$

XXII - 2 ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE DI UN SISTEMA DI CORPI RUOTANTI ATTORNO AD UN ASSE CON LA STESSA VELOCITÀ ANGOLARE.

Consideriamo un sistema di N punti materiali di massa $m_1, \ldots$ $\ldots m_N$ che ruotano con velocità angolare ω attorno ad un asse z passante per O come mostrato in figura 4. Ciascun punto materiale i-esimo compie un moto circolare con una velocità $\vec{v}_i$ il cui modulo è pari a $|\omega| r_i$ dove r_i è la distanza del punto dall'asse di rotazione. L'energia cinetica dell'i-esimo corpo è, perciò:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} I_i \omega^2 \qquad (19)$$

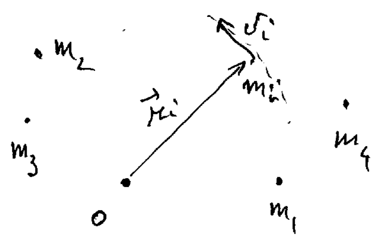


figura 4.

dove $I_i = m_i r_i^2$ è il momento di inerzia del corpo i-esimo rispetto all'asse.

Conseguentemente l'energia totale del sistema di particelle è:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i r_i^2}{2} \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (20)$$

dove I è il momento di inerzia I del sistema rispetto all'asse di rotazione.

Ora, se il moto del sistema è di pura rotazione attorno all'asse z passante per O (uscente dal piano di figura 4), allora la distanza r_i di ciascun corpo dall'asse è, conseguentemente, il momento di inerzia

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (21)$$

è costante. Dunque, l'energia cinetica di un sistema di corpi che ruotano attorno ad un asse è data semplicemente da:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (22)$$

La (22) si generalizza immediatamente ad un corpo rigido, che ruota attorno ad un asse z passante per O come mostrato in figura 5.

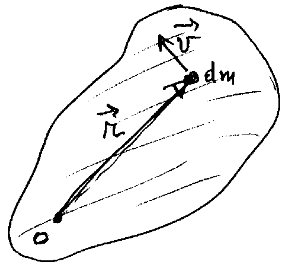


figura 5

In questo caso l'energia cinetica di rotazione associata ad un elemento infinitesimo di massa dm che si trova a distanza r dall'asse di rotazione è

$$dK = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, r^2 \omega^2 \qquad (23)$$

L'energia cinetica totale si otterrà, perciò, sommando tutti i contributi infinitesimi associati con tutti gli elementi di massa di cui è costituito il corpo rigido. Per quanto visto in precedenza, questa somma di elementi infinitesimi è l'integrale esteso all'intero corpo rigido. Dunque, l'energia cinetica totale è

$$K = \int \frac{1}{2} dm\, r^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\int dm\, r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (24)$$

dove I è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse.
Si noti l'analogia formale fra l'energia cinetica di traslazione di un corpo lungo un dato asse ($K = \frac{1}{2} m v_x^2$) con l'espressione dell'energia di rotazione purché si tenga conto dell'equivalenza formale:

$$m \longrightarrow I \qquad (25)$$
$$v_x \longrightarrow \omega$$

dunque, il momento di inerzia I di un corpo gioca per il moto rotatorio lo stesso ruolo che giocava la massa inerziale m per il moto di traslazione.
In effetti, la massa inerziale fornisce una misura dell'<u>inerzia</u> di un corpo a mettersi in movimento traslatorio. Infatti, il lavoro necessario per mettere in moto traslatorio un corpo a partire da fermo è

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} m v^2$$

Ciò significa che tanto più è grande la massa di un corpo, tanto più grande è il lavoro che deve essere fatto per metterlo in moto.
Analogamente, il lavoro fatto per mettere in rotazione un corpo è

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dunque, il momento di inerzia I di un corpo fornisce una misura diretta dell'inerzia del corpo a mettersi in rotazione attorno ad un asse.
Tanto più grande è il momento di inerzia, tanto maggiore sarà il lavoro necessario per mettere in rotazione il corpo.

XXII – 3 LAVORO IN UN MOTO DI ROTAZIONE

Consideriamo un corpo rigido vincolato a ruotare lungo un asse z passante per il punto O come mostrato in figura 6 (l'asse z è assunto uscente dal piano della figura). Supponiamo, per semplicità, che sul corpo sia applicata una sola forza esterna $\vec{F}$ in un punto P ~~[illegible]~~ giacente nel piano di figura a distanza r dall'asse. Sia φ l'angolo che la forza $\vec{F}$ forma con il vettore $\vec{r}$. Poiché il moto è di rotazione attorno all'asse passante per O, nel tempo infinitesimo dt, il punto P si sposta di una quantità infinitesima $ds = \omega_z\, dt = \omega_z r\, dt$ lungo un arco di circonferenza perpendicolare ad $\vec{r}$. Dunque il vettore spostamento $d\vec{s}$ formerà con $\vec{F}$ un angolo pari a $\beta = \pi/2 - \varphi$ (vedi figura)

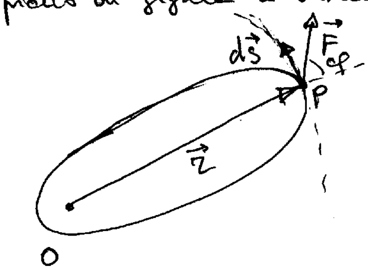


figura 6

Il lavoro infinitesimo fatto dalla forza nell'intervallo dt è, perciò,

$$dL = F\, ds \cos\beta = F\, ds \sin\varphi \qquad (26)$$

ma $ds = \omega r\, dt$, dunque

$$dL = F r \sin\varphi\; \omega\, dt \qquad (27)$$

D'altra parte, $F r \sin\varphi$ rappresenta la componente z del momento di forza τ_z. Dunque la (27) diventa

$$dL = \tau_z\, \omega_z\, dt \qquad (28)$$

dunque, la potenza P sviluppata dal momento di forza su un corpo in rotazione attorno ad un asse z è

$$P = \frac{dL}{dt} = \tau_z\, \omega_z \qquad (29)$$

dove τ_z è la componente z del momento di forza $\vec{\tau}$ e ω_z la componente z della velocità angolare $\vec{\omega}$.

Il risultato precedente è stato dedotto in un caso particolare in cui c'è una sola forza applicata in un punto sul piano di figura. Tale risultato si generalizza facilmente anche nel caso in cui le forze applicate siano più di 1 e siano applicate in punti diversi. Anche in questo caso più generale si ottiene la (29) con τ_z che è la componente z del momento di forza totale. Infine, la (29) è stata ottenuta assumendo che la rotazione avvenisse lungo l'asse z. Nel caso più generale in cui la rotazione avviene lungo un asse qualunque, si utilizza la relazione più generale:

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} = \tau_x \omega_x + \tau_y \omega_y + \tau_z \omega_z \qquad (30)$$

La (30) si riduce alla (29) nel caso particolare in cui la rotazione avviene attorno all'asse z ($\omega_x = \omega_y = 0$ in eq. (30)). Si osservi che, nel caso del moto traslatorio, la potenza di una forza era

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{31}$$

Nel caso del moto rotatorio abbiamo più volte visto che la velocità angolare $\vec{\omega}$ gioca il ruolo della velocità di traslazione $\vec{v}$ mentre il momento della forza $\vec{\tau}$ gioca il ruolo della forza $\vec{F}$, dunque non ci deve sorprendere la relazione (30) che si ottiene immediatamente dalla (31) facendo la sostituzione $\vec{F} \to \vec{\tau}$ e $\vec{v} \to \vec{\omega}$.

Nell'equazione (28) appare il prodotto $\omega_z dt$ che non è altro che l'angolo di rotazione infinitesimo del corpo nel tempo dt. Dunque, il lavoro infinitesimo dL fatto dalle forze per far ruotare un corpo di un angolo infinitesimo $d\theta$ è

$$dL = \tau_z \, d\theta \tag{32}$$

Il lavoro fatto per far ruotare il corpo a partire da θ_i fino a θ_f attorno ad un asse z sarà, perciò:

$$L = \int dL = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z \, d\theta \tag{33}$$

Si noti nuovamente l'analogia formale con il moto di traslazione lungo un asse x in cui $L = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$.

Nel caso particolare in cui il momento applicato è costante, allora τ_z può essere portato fuori dall'integrale nella (33) e

$$L = \tau_z (\theta_f - \theta_i) = \tau_z \, \Delta\theta \tag{34}$$

le formule (29) e (32) sono molto utili ed andrebbero memorizzate.

Nella dinamica del moto di un punto materiale avevamo dimostrato l'importante teorema dell'energia cinetica secondo cui: Il lavoro <u>totale</u> fatto su un punto materiale di massa m è pari alla variazione della sua energia cinetica. Questo teorema resta valido nel caso del moto di rotazione di un corpo rigido. Consideriamo, infatti un corpo rigido che ruota attorno ad un asse z, dalla seconda equazione cardinale sappiamo che il momento di forza totale τ soddisfa l'equazione:

$$\tau_z = I \frac{d\omega_z}{dt} \tag{35}$$

dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse z. Ma allora, la potenza sviluppata nel corpo rigido è (vedi eq. (29)):

$$P = \tau_z \omega_z = \left(I \frac{d\omega_z}{dt}\right)\omega_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) \qquad (36)$$

Ma il lavoro fatto nell'intervallo di tempo fra l'istante iniziale t_i e quello finale t_f è

$$L = \int_{t_i}^{t_f} P\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega_z^2\right) = \frac{1}{2} I \omega_{z_f}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{z_i}^2 \qquad (37)$$

Ma i contributi nell'ultimo membro a destra sono proprio l'energia cinetica finale e iniziale associate con la rotazione.

Esempio 1. Un motore è collegato all'asse di una ruota cilindrica che può essere schematizzata come un cilindro omogeneo di raggio R e massa M. Se il motore è in grado di sviluppare una coppia costante di momento di forza τ lungo l'asse e se gli attriti sono trascurabili, si calcoli l'accelerazione angolare della ruota, la sua velocità angolare e l'angolo di rotazione ad un generico istante t. Si assuma che al tempo $t=0$ la ruota sia ferma e l'angolo iniziale sia $\theta_0 = 0$.

Soluzione: Le condizioni iniziali sono $\omega(0) = 0$ e $\theta(0) = 0$. L'equazione del moto è data dalla II^a equazione Cardinale della dinamica:

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (38)$$

dove $I = M\frac{R^2}{2}$ è il momento di inerzia rispetto all'asse. Dalla (38) deriva immediatamente che l'accelerazione angolare è

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2\tau}{MR^2} \qquad (39)$$

poiché τ, M, R sono valori costanti, il moto di rotazione è uniformemente accelerato. Dunque, la velocità angolare e l'angolo θ sono dati da

$$\omega(t) = \alpha t \qquad (40)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (41)$$

dove α è dato dalla (39).

Esempio 2 - Nel caso precedente, si dica quanti giri ha compiuto la ruota prima di raggiungere la velocità angolare ω_0.

Soluzione: Poiché il momento di forza è costante, il lavoro fatto dal motore quando la ruota fa una rotazione $\Delta\theta$ è

$$L = \tau \Delta\theta \qquad (42)$$

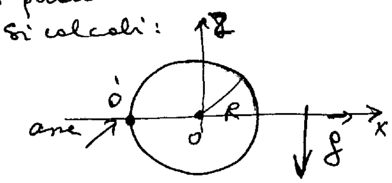
D'altra parte, per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro è pari alla variazione dell'energia cinetica di rotazione $\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_0^2$. Dunque:

$$\tau \Delta\theta = \frac{1}{4} M R^2 \omega_0^2 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{4} \frac{M R^2 \omega_0^2}{\tau} \qquad (43)$$

Ogni giro corrisponde ad una rotazione $\Delta\theta_g = 2\pi$, dunque il numero di giri è

$$n = \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_g} = \frac{M R^2 \omega_0^2}{8\pi\tau} \qquad (44)$$

Esempio 3 – Un corpo ~~di~~ forma cilindrica omogenea ha massa M e raggio R ed è libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale parallelo all'asse del cilindro e passante per il bordo del cilindro. Il cilindro viene lasciato libero di ruotare a partire da fermo quando si trova nella posizione mostrata schematicamente in figura. Si calcoli:



a) la velocità ~~angolare~~ massima raggiunta dal cilindro.

b) Quale è l'angolo totale di rotazione del cilindro prima che si fermi per la prima volta.

Si assumono trascurabili tutti gli attriti.

Soluzione: a) poiché gli attriti sono trascurabili, si conserva l'energia meccanica del sistema. Poiché il moto del cilindro è di rotazione attorno all'asse, l'energia cinetica di rotazione è

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (45)$$

dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse. Per il teorema degli assi paralleli

$$I = M\frac{R^2}{2} + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \qquad (46)$$

L'energia potenziale del solido è la somma delle energie potenziali dei singoli elementi infinitesimi di massa dm di cui è costituito il corpo. Assumendo come ~~superficie~~ di energia 0 quella individuata dal piano orizzontale x ~~y~~ in figura (y è entrante nel piano di figura), l'energia di una massa dm ad altezza z è

$$dU = dm\, z\, g \qquad (47)$$

Dunque, l'energia totale è $U = \int dm\, z\, g$ (48)
dove l'integrale è esteso all'intero corpo. Ma, ricordando la definizione di coordinata z del centro di massa:

$$z_{CM} = \frac{\int dm\, z}{M} \Rightarrow U = M z_{CM}\, g \qquad (49)$$

La relazione (49) dimostra che L'ENERGIA GRAVITAZIONALE XXII DI UN CORPO È UGUALE ALL'ENERGIA CHE AVREBBE UN CORPO PUNTIFORME DI MASSA PARI ALLA MASSA TOTALE CONCENTRATO NEL CENTRO DI MASSA. Questa proprietà è molto importante per la soluzione degli esercizi.

In definitiva, l'energia totale del corpo ad un generico istante è

$$E = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2 + M g z_{CM} \qquad (50)$$

Poiché l'energia meccanica si conserva, essa dovrà essere uguale al valore iniziale quando il corpo si trova come in figura ($z_{CM}=0$) e fermo ($\omega = 0$). Dunque $E = 0$ ad ogni istante

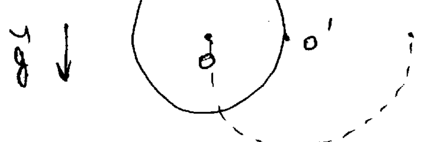
$$\frac{3}{4} M R^2 \omega^2 + M g z_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{-\frac{4}{3} g \frac{z_{CM}}{R^2}} \qquad (51)$$

La velocità angolare massima verrà raggiunta quando il centro di massa raggiunge il valore minimo di z_{CM}. Ora, il centro di massa compie un moto circolare di raggio R attorno all'asse di rotazione (O' in figura) e raggiunge il punto più basso quando $-z_{CM} = R$. Dunque

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{R}} \qquad (52)$$

b) Il corpo si ferma per la prima volta quando z_{CM} ritorna uguale a 0 cioè quando si trova nella posizione indicata nella figura sotto, cioè quando si è spostato di una semicirconferenza. L'angolo totale di rotazione è, perciò,

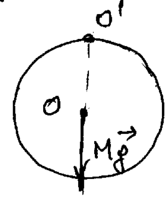
$$\Delta\theta = \pi \qquad (53)$$



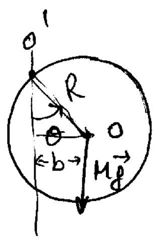
Esempio 4 — Nell'esempio precedente si trovi la posizione di equilibrio del corpo e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

Soluzione: Perché il corpo stia in equilibrio, la sua accelerazione angolare deve essere nulla. Dunque la posizione di equilibrio è quella in cui il momento di forza applicato è nullo. Ma il momento di forza esercitato dalla forza di attrazione gravitazionale è pari, in modulo, alla forza peso totale Mg moltiplicata per il braccio rispetto ad O' assumendo che la forza peso sia applicata nel centro di massa.

Dalla figura si vede facilmente che il braccio è nullo solamente se il punto O (centro di massa) si trova sotto al punto O' dimodoché il raggio vettore $\vec{r} = \overrightarrow{O'O}$ è parallelo a $M\vec{g}$. Dunque, la posizione di figura rappresenta la posizione di equilibrio.



L'equilibrio è, inoltre stabile perché una piccola rotazione rispetto a tale posizione genera un momento di forza di richiamo che tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio.



Supponiamo, perciò di ruotare il sistema di un piccolo angolo θ (vedi figura). Dalla figura si vede che il momento di forza è lungo l'asse verticale y uscente ed è diretto in verso entrante. Dunque $\tau_y < 0$. In particolare:

$$\tau_y = -Mgb = -MgR\sin\theta$$

poiché $\theta \ll 1$, $\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \tau_y = -MgR\theta$ (54)

L'equazione del moto rotatorio è (II^a eq. CARDINALE).

$$-MgR\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (55)$$

ma $I = \frac{3}{2}MR^2 \Rightarrow$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R}\theta \qquad (56)$$

L'equazione (56) è la tipica equazione del moto armonico la cui soluzione è una oscillazione attorno alla posizione di equilibrio (equazione del pendolo) con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R}} \qquad (57)$$

Conseguentemente, la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (58)$$