MOTI DI ROTOTRASLAZIONE

Fino ad ora abbiamo trattato solamente i casi particolari in cui un corpo rigido o trasla rigidamente o ruota attorno ad un asse fisso. Nel primo caso tutti i punti del corpo rigido si muovono nello stesso modo e, quindi, per descrivere la posizione del corpo ad ogni istante, basta conoscere la posizione di un suo punto come, ad esempio il centro di massa il cui moto è descritto dalla I=° EQUAZIONE CARDINALE

$$\vec{F}_{tot\,est} = M\,\vec{a}_{CM} \qquad (1)$$

Nel secondo caso (ROTAZIONE attorno ad un asse fisso) la posizione del corpo è individuata dall'angolo $\theta(t)$ che può essere ottenuto risolvendo la II=° EQUAZIONE CARDINALE:

$$\tau_{tot\,est} = I\,\alpha \qquad (2)$$

dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Nel caso più generale, però, un corpo rigido può compiere un moto più complicato che è sempre pensabile come la sovrapposizione di un moto di pura traslazione e di un moto di rotazione. Ad esempio, si consideri il moto schematizzato in figura 1. Nel caso di figura 1, nel tempo Δt il centro di massa del corpo si è spostato di un dato spostamento $\vec{S}(\Delta t)$ ma, contemporaneamente il corpo ha ruotato di un angolo θ.

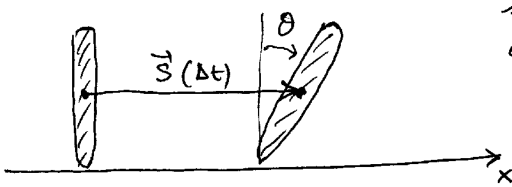


figura 1

In generale, si può dimostrare che, se un corpo rigido si sta muovendo, allora la velocità di un qualunque punto P del corpo rigido può essere sempre scritta nella forma generale:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} \qquad (3)$$

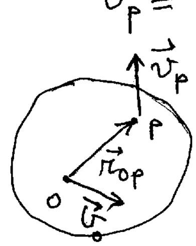


fig 2.

dove $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_P$ sono le velocità dei punti 0 e P, $\vec{\omega}$ è la velocità angolare istantanea del corpo rigido e $\vec{r}_{0P}$ è il vettore che congiunge il punto 0 con il punto P. La (1) vale per qualunque coppia di punti con $\vec{\omega}$ uguale per qualunque coppia di punti. La (1) discende direttamente dal fatto che il corpo è rigido e, quindi, qualunque sia il suo moto, le posizioni relative dei suoi punti non possono cambiare nel tempo (se due punti si trovano ad una data distanza, questa distanza resta sempre costante).

Per dimostrare la validità della (1) si consideri un generico punto O del corpo rigido. Tale punto si muoverà con una data velocità $\vec{v}_0$. Ma allora, se ci mettiamo su un sistema di riferimento che viaggia con velocità pari a $\vec{v}_0$ (sistema S'), in tale sistema il punto O sarà fermo. Ma allora, in questo sistema di riferimento l'unico moto possibile per il corpo rigido è un moto di rotazione attorno ad O con velocità angolare $\vec{\omega}$. Infatti, è come se il corpo rigido fosse incernierato in O e, quindi, è facile rendersi conto che l'unico moto possibile è una rotazione attorno ad O. Ma allora, nel sistema S' la velocità del punto P sarà

$$v_p' = \vec{\omega} \times \vec{r}_{op} \qquad (4)$$

Adesso, se torniamo nel sistema di riferimento fisso in cui O si muove con velocità $\vec{v}_0$, la velocità di P misurata in questo riferimento sarà $\vec{v}_p = \vec{v}_0 + v_p'$ che è proprio l'espressione (3).

DUNQUE IL MOTO ISTANTANEO DI UN CORPO RIGIDO PUÒ ESSERE SEMPRE PENSATO COME UN MOTO DI PURA TRASLAZIONE ($\vec{v}_0$) e un moto di pura rotazione ($\vec{\omega} \times \vec{r}_{op}$).

È importante rimarcare che la (3) è estremamente generale e vale per qualunque coppia di punti del corpo rigido. Dunque si danno 3 casi:

a) $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_p = \vec{v}_0$. Qualunque punto del corpo rigido si sposta nello stesso modo: TRASLAZIONE PURA

b) $\vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_{op}$. Il moto è una pura rotazione attorno ad un asse passante per O.

c) $\vec{\omega} \neq 0$, $\vec{v}_0 \neq 0$: MOTO DI ROTOTRASLAZIONE.

Fra i moti di rototraslazione c'è un moto particolarmente importante detto <u>MOTO DI ROTOLAMENTO PURO</u>. Questo è, ad esempio, il moto di una palla che rotola a terra o delle ruote di un automobile o di una bicicletta.

XXIII - 1 MOTO DI ROTOLAMENTO PURO

Si dice che un moto di rototraslazione è di ROTOLAMENTO quando il corpo nel suo moto resta sempre in contatto con il terreno e il punto di contatto O fra terreno e corpo è istantaneamente fermo $\Rightarrow \vec{v}_O = 0$ (vedi figura 3). Consideriamo, ad esempio, un cilindro di raggio R che rotola su un pavimento orizzontale come mostrato schematicamente in figura 3. Se il moto è di rotolamento, allora il punto O di contatto fra cilindro e pavimento è istantaneamente fermo cioè $\vec{v}_O = 0$. Ma allora, la velocità $\vec{v}_P$ di un generico punto del corpo è istantaneamente (vedi eq 3)

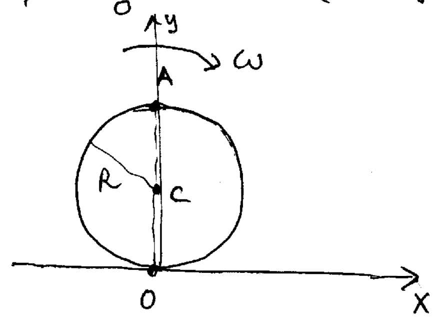


figura 3

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OP} \qquad (5)$$

cioè il moto istantaneo del corpo è una pura rotazione attorno al punto di contatto O. Si osservi, però, che, al contrario di quanto avviene nel caso di una rotazione attorno ad un asse fisso, adesso il punto di contatto non resta sempre lo stesso (man mano che il cilindro rotola, punti diversi del cilindro vengono in contatto con il pavimento). Quindi il rotolamento può essere pensato come una successione di rotazioni successive attorno ad assi diversi. Nel caso del moto mostrato in figura 3, per la convenzione adottata in precedenza, la velocità angolare $\vec{\omega}$ è diretta in verso entrante rispetto al piano della figura e, quindi, è lungo l'asse z (uscente) ma è in verso opposto [$\vec{\omega} \equiv (0, 0, -\omega)$, dove ω = modulo velocità angolare]. Poiché il moto istantaneo è di pura rotazione attorno ad O, vale la (5) e, quindi, la velocità del centro di massa C è diretta lungo l'asse x nel verso positivo ed è pari a

$$\vec{v}_C = \omega R \, \vec{i} \qquad (6)$$

mentre la velocità del punto A è doppia di $\vec{v}_C$ e pari a

$$\vec{v}_A = 2 \omega R \, \vec{i} \qquad (7)$$

Il centro di massa viaggia, perciò, con una velocità lungo x che è pari al prodotto ωR.

Si osservi che il moto di rotolamento puro può essere sempre pensato in due modi distinti del tutto equivalenti:

a) Un moto di pura rotazione attorno al punto di contatto

b) Un moto di traslazione lungo l'asse x con la velocità ~~ωR~~ ωR del centro di massa e una contemporanea rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa C. Infatti, in base alla relazione generale (3), la velocità di un generico punto P del corpo rigido può essere sempre scritta nella forma

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{CP} \qquad (7)$$

Infatti, se consideriamo come punto P il punto O di contatto con il pavimento, si trova, utilizzando la (7), e tenendo conto che $\vec{v}_C = \omega R \vec{i}$

$$\vec{v}_O = 0$$

che è proprio condizione di rotolamento.

In definitiva il moto di un corpo è di rotolamento se la velocità del punto di contatto è nulla

$$\vec{v}_O = 0 \qquad (8)$$

oppure, alternativamente, se la velocità del centro di massa è

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OC} \qquad (9)$$

la (8) e la (9) rappresentano due modi alternativi per definire che un moto è di rotolamento puro.

<u>OSSERVAZIONE</u> <u>IMPORTANTE</u>:

In precedenza abbiamo mostrato che la II equazione cardinale della dinamica dei sistemi:

$$\vec{\tau}_{tot\,est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10)$$

può essere applicata solamente nei due casi:

a) $\vec{\tau}$ e $\vec{L}$ sono calcolati rispetto ad un polo fisso O

b) $\vec{\tau}$ ed $\vec{L}$ sono calcolati rispetto al centro di massa.

Nel caso di rotolamento puro, il punto di contatto O è istantaneamente fisso. Dunque, nel caso di un rotolamento puro, potremo sempre applicare la II^a cardinale sia rispetto al centro di massa che rispetto al punto di contatto istantaneo.

PROPRIETÀ IMPORTANTE DEL ROTOLAMENTO PURO:

Nel rotolamento puro, il punto di contatto è istantaneamente fisso ($\vec{v}_0 = 0$). Ma allora le forze di contatto agenti sul corpo nel punto di contatto possono essere solamente le forze di reazione normale $\vec{R}$ e la forza di attrito statico $\vec{F}_S$. Se invece, il corpo scivola, allora l'attrito diventa dinamico. Nel rotolamento puro, poiché il punto di contatto è istantaneamente fermo, allora il lavoro fatto dalle forze di contatto è nullo. Questa proprietà è molto importante e va sempre tenuta ben presente nella risoluzione di esercizi. *

XXIII - 2 ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO.

Nelle lezioni precedenti abbiamo visto che un corpo rigido che compie un moto di pura traslazione ha un'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} M V^2 \qquad (11)$$

mentre, nel caso di un moto di pura rotazione attorno ad un asse fisso, l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (12)$$

Ci domandiamo, ora, quale è l'energia cinetica di un corpo rigido che compie un moto di rototraslazione. Si può dimostrare (DIMOSTRAZIONE OMESSA) che l'energia cinetica totale di un corpo rigido che compie un moto arbitrario è

$$K = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad (13)$$

dove M è la massa del corpo, V_c è la velocità del CENTRO DI MASSA, I_c è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione PASSANTE per il CENTRO DI MASSA e ω è la velocità angolare. La (11) si interpreta dicendo che l'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica di traslazione del C.M. e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa.

Nel caso di un moto di rotolamento puro, come abbiamo visto, il moto istantaneo è una rotazione pura attorno al punto di contatto O. Dunque, in questo caso l'energia può essere anche scritta nella forma equivalente:

$$K = \frac{1}{2} I_0 \, \omega^2 \qquad (14)$$

dove I_0 è il momento di inerzia rispetto al polo O (punto di contatto).
È facile, infatti, verificare che che per un rotolamento puro, la (13) e la (14) sono equivalenti. Infatti, per il teorema degli assi paralleli, $I_0 = MR^2 + I_C$ dove R è la distanza del centro di massa dal punto di contatto e I_C è il momento di inerzia rispetto al centro di massa. Dunque, sostituendo questa espressione nella (14) si trova:

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

che, essendo $\omega R = v_C$ (moto di rotolamento puro), risulta coincidente con la (13). Dunque, nel caso di un rotolamento puro, la (13) e la (14) possono essere utilizzate indifferentemente.

Adesso vediamo alcuni importanti Esempi:

Esempio 1 — Un cilindro omogeneo di massa M e raggio r rotola su un piano orizzontale. Al tempo iniziale $t=0$, la velocità angolare del cilindro è ω_0. Si trovi:

1) la reazione normale esercitata dal piano sul cilindro.
2) la velocità angolare ad ogni istante
3) la forza di attrito statico

Soluzione: per risolvere il problema bisogna usare l'equazione per il moto di traslazione (Iª equazione cardinale) e quella per il moto di rotazione (IIª cardinale); la forza totale esterna è la somma della forza di reazione normale $\vec{R} \equiv (0, R, 0)$; della forza di attrito $\vec{F}_S \equiv (-F_S, 0, 0)$ e della forza peso $M\vec{g} \equiv (0, -Mg, 0)$. La Iª cardinale si scrive

$$F_x = -F_S = M a_x \qquad (1)$$

$$F_y = R - Mg = M a_y \qquad (2)$$

$$\text{ma } a_y = 0 \implies R = Mg \qquad (3)$$

L'equazione per il moto di rotazione è la IIª equazione cardinale

$$\Gamma_z = I \, \alpha_z \qquad (4)$$

dove Γ_z = componente z del momento di forza totale rispetto ad un polo fisso o al centro di massa, I = momento di inerzia rispetto al polo fisso o al centro di massa e α_z = componente z dell'accelerazione angolare.

È IMPORTANTE OSSERVARE CHE, SE IL CORPO ROTOLA DA SINISTRA A DESTRA COME MOSTRATO IN FIGURA,

ALLORA IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE È ENTRANTE NEL PIANO DI FIGURA. DUNQUE, LA COMPONENTE Z (z è l'asse uscente dal piano se xyz è destrorso) DELLA VELOCITÀ ANGOLARE È NEGATIVA E PARI A

$$\omega_z = -\omega \qquad (5)$$

dove ω = modulo della velocità angolare. Se il moto è di rotolamento puro, allora la relazione fra la velocità $\vec{v}_c$ del centro di massa e la velocità angolare $\vec{\omega}$ è

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_{oc} \qquad (6)$$

ma nel caso di figura: $\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega_z)$, $\vec{r}_{oc} \equiv (0, r, 0)$ e $v_c = (v_x, 0, 0)$. Applicando la regola del prodotto vettoriale alla (6) si trova

$$V_x = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{oc})_x = \omega_y r_{oc_z} - \omega_z r = -\omega_z r \qquad (7)$$

DUNQUE, la condizione di moto di rotolamento si scrive:

$$V_x = -\omega_z r \qquad (8)$$

ma allora, in un moto di rotolamento puro, esiste un'analoga relazione (MOLTO IMPORTANTE PER GLI ESERCIZI) che lega la componente x dell'accelerazione del centro di massa (a_x) alla componente z dell'accelerazione angolare α_z. Infatti, derivando entrambi i membri della (8) rispetto al tempo si trova:

$$a_x = -\alpha_z r \qquad (9)$$

Questa relazione è molto importante e risulta essenziale per la risoluzione di esercizi che concernono moti di rotazione pura.

Adesso torniamo alla determinazione del moto. Per far questo va deciso se utilizzare la (4) utilizzando come polo il centro di massa o il punto di contatto. Conviene scegliere come polo quello per il quale l'espressione del momento di forze $\vec{\Gamma}$ risulti più semplice. Nel caso in esame conviene scegliere come polo il punto di contatto. Infatti, la forza $\vec{R}$ e la forza $\vec{F_s}$ sono applicate nel punto di contatto e, dunque, non danno nessun momento di forza rispetto a tale punto (il braccio delle forze è nullo). Resta solo la forza peso la cui retta d'azione passa, però, per il punto di contatto e, quindi, fornisce un momento di forza nullo rispetto a tale punto. Ma allora $\Gamma_z = 0$ che, sostituito nella (4) fornisce

$$\alpha_z = 0 \implies \omega_z = \text{costante} \qquad (10)$$

Dunque, se inizialmente la velocità angolare è pari a $\omega_z(0) = -\omega_0$, essa resta costante ad ogni istante. Poiché il moto è di rotolamento puro, vale la (8) e, quindi, la velocità di traslazione del centro di massa è

$$V_x = \omega_0 r \quad = \text{costante} \qquad (11)$$

Inoltre, essendo $\alpha_z = 0$, dalla (9) si deduce che anche l'accelerazione a_x del centro di massa è nulla. Sostituendo $a_x = 0$ nella (1) si trova, infine $F_s = 0$.

In conclusione, se il rotolamento è puro e avviene su un piano orizzontale, la forza di attrito statico è sempre nulla e la velocità di traslazione resta sempre costante.

OSSERVAZIONE: Il fatto che la velocità resti costante può essere anche dedotto da argomenti energetici. Infatti le forze $\vec{R}$ e F_s non fanno lavoro perché applicate in un punto fisso, inoltre la forza peso non fa lavoro perché perpendicolare allo spostamento del corpo. Ma allora l'energia cinetica del corpo deve restare costante. D'altra parte, l'energia cinetica è $K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ dove I_0 = momento di inerzia rispetto al punto fisso. La costanza di K implica, perciò, la costanza di ω e, quindi, per la (8) la costanza della velocità del centro di massa.

METODO ALTERNATIVO: Può essere utile provare a risolvere lo stesso esercizio utilizzando come polo il centro di massa. In tal caso, la componente z del momento di forza Γ_z non è più nulla ma è pari a

$$\Gamma_z = - F_s r \qquad (12)$$

Dunque, la (4) diventa

$$- F_s r = I_0 \alpha_z = \frac{3}{2} M r^2 \alpha_z \qquad (13)$$

cioè

$$F_s = -\frac{3}{2} M r \alpha_z = \frac{3}{2} M a_x \qquad (14)$$

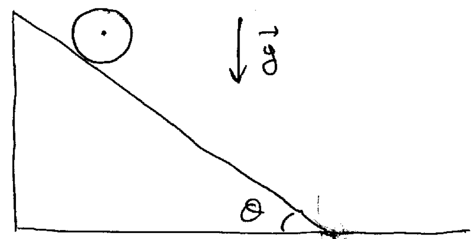
dove abbiamo utilizzato la relazione (9)

Sostituendo la (14) nella (1) si trova nuovamente $a_x = 0$ e $F_s = 0$.

ESEMPIO 2 – Un cilindro omogeneo di massa M e raggio r è appoggiato su un piano inclinato con angolo di inclinazione θ. Il centro di massa si trova inizialmente ad altezza $h+r$ rispetto ad un piano orizzontale. Si calcoli la velocità finale del cilindro quando arriva in fondo al piano inclinato nei due casi:

a) Il piano è perfettamente liscio (Il cilindro scivola senza rotolare)

b) Il piano esercita un attrito sul cilindro e il cilindro si muove con un moto di rotolamento puro.



Soluzione:

a) Poiché non c'è attrito, si conserva l'energia meccanica. Inizialmente l'energia potenziale è

$$U_i = Mg(h+r) \qquad (1)$$

alla fine (quando il cilindro è sul piano orizzontale), il centro di massa si trova a distanza r dal pavimento orizzontale e, quindi,

$$U_f = Mg\,r \qquad (2)$$

dove abbiamo assunto che il piano di energia potenziale nulla sia il piano orizzontale.

Poiché il moto è di pura traslazione, l'energia cinetica è $K = \frac{1}{2}MV^2$.

Dunque $K_i = 0$ mentre $K_f = \frac{1}{2}MV_f^2$ dove V_f = velocità finale.

La conservazione dell'energia meccanica si scrive:

$$0 + Mg(h+r) = \frac{1}{2}MV^2 + Mgr \implies v = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

b) Se il moto è di rotolamento puro, la forza di attrito STATICO $\vec{F}_s$ non compie lavoro poiché il punto di contatto su cui essa è applicata è fermo. Ma allora, anche in questo caso, l'energia meccanica si conserva. Stavolta, però, il corpo ha un moto di rotazione sovrapposto a quello di traslazione e l'energia cinetica non è più data da $\frac{1}{2}MV^2$ ma da

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_c\,\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}r^2\omega^2 \qquad (4)$$

D'altra parte, essendo $V = \omega r$ (MOTO DI ROTOLAMENTO PURO),

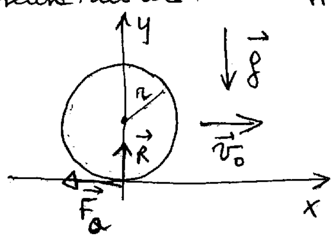
$$K = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}MV^2 \qquad (5)$$

Dunque, la conservazione dell'energia meccanica fornisce una velocità di traslazione pari a

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \qquad (6)$$

In conclusione, il corpo che rotola arriva con una velocità di traslazione più bassa rispetto ad un corpo che scivola. Il motivo di ciò è che, adesso, l'energia potenziale si trasforma in parte in energia di traslazione e, in parte, in energia di rotazione. Di conseguenza, l'energia associata al moto di traslazione è, quindi, la velocità di traslazione risulta ridotta.

ESEMPIO 3 — Un cilindro omogeneo di massa M e raggio r viene lanciato ad un istante $t=0$ con velocità v_0 su un piano orizzontale lungo l'asse x nel verso positivo. Il moto all'istante $t=0$ è puramente traslatorio cioè il cilindro scivola inizialmente senza rotare. Il coefficiente di attrito dinamico fra cilindro e superficie è μ.



a) si trovi come varia nel tempo la velocità del centro di massa e la velocità angolare.

b) Si mostri che ad un dato istante t_0 il cilindro inizia a muoversi con un moto di puro rotolamento e si trovi il valore di t_0.

c) si dica come varia nel tempo la velocità del centro di massa per $t > t_0$.

Soluzione: a) come nell'esempio 1, le equazioni del moto sono la I^a e la II^a equazione cardinale che si scrivono (con riferimento alla figura ~~[illegible]~~

$$-F_a = M a_x \qquad (1)$$

$$-F_a r = I_c \alpha_z = \frac{M}{2}\alpha_z r^2 \qquad (2)$$

dove $I_c = \frac{1}{2}Mr^2$ è il momento di inerzia rispetto al centro di massa.

ATTENZIONE!!: in questo caso abbiamo scelto come polo per il calcolo del momento delle forze il centro di massa. Questa scelta è obbligata. Infatti, in questo caso il moto non è di rotolamento puro. Dunque, il punto di contatto NON È ISTANTANEAMENTE FERMO e, perciò, la II^a CARDINALE NON PUÒ ESSERE APPLICATA AL PUNTO DI CONTATTO!!.

~~le equazioni (1) e (2)~~ F_a nelle equazioni (1) e (2) è la forza di attrito dinamico che è nota e pari a $F_a = \mu M g$, di conseguenza dalle (1) e (2) si deduce sia l'accelerazione a_x del centro di massa sia l'accelerazione angolare α_z.

$$a_x = -\mu g \qquad (3)$$

$$\alpha_z = -\frac{2\mu g}{r} \qquad (4)$$

Queste equazioni descrivono un moto di traslazione uniformemente decelerato e un moto di rotazione uniformemente decelerato. Dunque la velocità v_x ad ogni istante e la velocità angolare ω_z ad ogni istante sono date da:

$$v_x = v_{xi} - \mu g t \qquad (5)$$

$$\omega_z = \omega_{zi} - \frac{2\mu g}{r} t \qquad (6)$$

dove v_{xi} e ω_{zi} sono i valori iniziali della velocità di traslazione e della velocità angolare che, nel nostro caso sono $v_{xi} = V_0$ e $\omega_{zi} = 0$. (il moto iniziale è una traslazione pura). Dunque

$$V_x = V_0 - \mu g t \qquad (7)$$

$$\omega_z = -2\frac{\mu g}{r} t \qquad (8)$$

b) La condizione di rotolamento puro viene raggiunta quando

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{oc} \quad \Rightarrow \quad v_x = -\omega_z r \qquad (9)$$

Sostituendo V_x e ω_z dati in equazione (7) e (8) nella (9) si trova:

$$V_0 - 3\mu g t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_0 = \frac{v_0}{3\mu g} \qquad (10)$$

c) La soluzione (7), (8) era stata ottenuta nell'ipotesi che il corpo scivolasse e, quindi, il punto di contatto fosse istante per istante in moto. In queste condizioni agiva sul cilindro una forza di attrito dinamico. Al tempo $t = t_0$, il corpo compie un moto di rotolamento puro con il punto di contatto che è istantaneamente fermo. Dunque, nel punto di contatto agisce una forza di attrito statico F_S. Le condizioni al tempo t_0 sono quindi quelle dell'esempio 1 e, come mostrato in quell'esempio, il moto successivo è ancora un moto di rotolamento puro con le velocità di traslazione e di rotazione che restano costanti. Sostituendo a t nelle (7) e (8) il valore (10) si trova

$$V_x = \frac{2}{3} v_0 \qquad (11)$$

$$\omega_z = -\frac{2}{3}\frac{v_0}{r} \qquad (12)$$

ESERCIZIO: Nel caso dell'esempio 3, si calcoli il lavoro complessivo L fatto dalle forze di attrito dinamico nell'intervallo di tempo in cui il corpo scivola sul piano orizzontale.

1=° METODO: Dal teorema dell'energia cinetica, il lavoro fatto dall'attrito dinamico è

$$L = K_f - K_i \qquad (1)$$

dove $$K_i = \frac{1}{2} M V_0^2 \qquad (2)$$

e

$$K_f = \frac{1}{2} M V_x^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\omega_z^2 = \frac{MV_0^2}{3} \qquad (3)$$

Dunque:

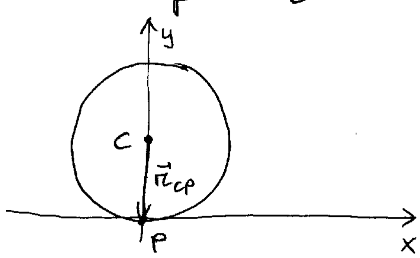
$$L = \frac{MV_0^2}{3} - \frac{MV_0^2}{2} = -\frac{MV_0^2}{6} \qquad (4)$$

2=° METODO: Il lavoro della forza di attrito dinamico è

$$L = -\mu M g S \qquad (5)$$

dove S è lo spostamento del punto di contatto (infatti la forza di attrito è applicata nel punto di contatto).
Per trovare lo spostamento S del punto di contatto si deve trovare la velocità lungo l'asse x del punto di contatto. Poiché il cilindro è un corpo rigido, la velocità di qualunque punto è nota se è nota la velocità del centro di massa e la velocità angolare.
Indicando con P il punto di contatto si scrive

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP} \qquad (6)$$



Ricordando che $\vec{v}_C \equiv (V_x, 0, 0)$
$\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega_z)$
$\vec{r}_{CP} \equiv (0, -r, 0)$

Si deduce che v_P è diretto lungo l'asse x e

$$v_{Px} = v_x + \omega_z r \qquad (7)$$

Sostituendo i valori di V_x e ω_z nelle equazioni (7) e (8) dell'esempio 3, si trova

$$v_{Px} = v_0 - 3\mu g t \qquad (8)$$

Dunque $$S = \int_0^{t_0} V_{Px}\, dt = v_0 t_0 - \frac{3}{2}\mu g t_0^2 \qquad (9)$$

dove $$t_0 = \frac{v_0}{3\mu g} \qquad (10)$$

Sostituendo le (10) nella (5) si trova

$$S = \frac{v_0^2}{6\mu g} \qquad (11)$$

Dunque, sostituendo le (11) nella (5) si trova

$$L = -\frac{M\,V_0^2}{6} \qquad (12)$$

che è proprio il risultato ottenuto con il metodo energetico.

XXIII – 3 EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO

Condizione perché un corpo rigido sia in equilibrio è che la sua velocità di traslazione (velocità del centro di massa $\vec{V}_{CM}$) e la sua velocità angolare $\vec{\omega}$ sia nulla ad ogni istante. Infatti, poiché la velocità di un generico punto P è $\vec{v}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, se $\vec{V}_{CM}=0$ e $\vec{\omega}=0$ allora ogni punto del corpo rigido è fermo. Ma se $\vec{L}=0$ e $\vec{V}_{CM}=0$ allora, essendo $\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ e $\vec{F}_{est} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}$, risulta:

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

$$\vec{\tau}_{est} = 0 \qquad (15)$$

$$\vec{F}_{est} = 0 \qquad (16)$$

dove $\vec{\tau}_{est}$ è la somma di tutti i momenti di forze esterni rispetto ad un polo fisso o al C.M. e $\vec{F}_{est}$ è la somma di tutte le forze esterne.

Perché l'equilibrio sia stabile, inoltre, dovrà accadere che un piccolo spostamento del centro di massa o una piccola rotazione diano origine a forze e momenti di forza tali da riportare il corpo rigido nella posizione di equilibrio. In altre parole, una disposizione di un corpo rigido sarà di equilibrio stabile se essa corrisponde ad un minimo relativo dell'energia potenziale. Qualunque piccolo spostamento di traslazione o di rotazione del corpo rigido da questa posizione deve portare ad un aumento dell'energia potenziale. Un tipico esempio è mostrato in figura 4 dove si considera un'asta rigida incernierata in un estremo e libera di ruotare attorno a tale estremo O.

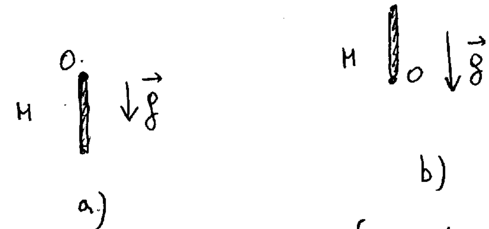
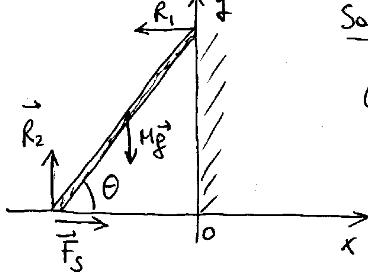


figura 4

La posizione di figura a) corrisponde ad un equilibrio stabile poiché il momento della forza peso è nullo (la forza peso è applicata nel centro di massa ed ha braccio nullo rispetto ad O). Inoltre l'equilibrio è stabile perché se si sposta di poco la barretta dalla posizione essa tende a tornare verso la posizione di equilibrio. La configurazione b, invece, corrisponde a equilibrio instabile (verificare).

Esempio: Una scala di lunghezza L e massa M distribuita uniformemente è appoggiata ad una parete e al pavimento e forma con esso un angolo θ come mostrato in figura. Se l'attrito con il pavimento ha coefficiente μ_s mentre la parete verticale è liscia ($\mu_s = 0$), si trovi quale è il minimo valore θ_{min} dell'angolo θ per cui la scala non scivola.



Soluzione: se si vuole che la scala sia in equilibrio devono essere verificate le condizioni (15) e (16). Le forze esterne applicate alla scala sono: la reazione $\vec{R}_1 \equiv (-R_1, 0, 0)$ della parete verticale, la reazione $\vec{R}_2 \equiv (0, R_2, 0)$ del pavimento, la forza di attrito statico $\vec{F}_s \equiv (F_s, 0, 0)$ e la forza peso $M\vec{g}$ applicata al centro della scala (centro di massa).

Si noti che noi abbiamo assunto che la forza di attrito statico sia diretta nel verso positivo dell'asse x come sembra ragionevole aspettarsi poiché la forza di attrito statico tende ad impedire lo scivolamento della scala. Comunque, in generale, il verso della forza di attrito statico (al contrario del verso delle reazioni normali $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$) non è noto a priori. Dunque, se facendo i calcoli si trovasse un valore di F_s negativo, tale valore sarebbe possibile e significherebbe solamente che il vettore $\vec{F}_s$ è diretto in verso opposto a quello assunto in figura. Per la (16), la somma di tutte le forze deve essere nulla e quindi

$$F_{tot_x} = -R_1 + F_s = 0 \quad \Rightarrow \quad F_s = R_1 \qquad (17)$$

$$F_{tot_y} = R_2 - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = Mg \qquad (18)$$

Poiché le incognite sono 3 (R_1, F_s, R_2) e le equazioni 2, è necessaria un'ulteriore equazione che si ottiene imponendo che la componente z del momento di forza sia nulla (15). Come polo in questo caso conviene scegliere il punto di contatto con il pavimento. In tali condizioni, infatti, i momenti di forza dovuti alle forze $\vec{R}_2$ e $\vec{F}_s$ applicate nel punto di contatto sono nulli. Di conseguenza, il momento di forza (componente z) dovuto alle restanti forze è

$$\tau_{tot_z} = R_1 L \sin\theta - Mg \frac{L}{2} \cos\theta = 0 \qquad (19)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il braccio della forza $M\vec{g}$ è $\frac{\ell}{2}\cos\theta$ mentre quello della forza R_1 è $L \sin\theta$. Dalla (19) si deduce:

$$R_1 = \frac{Mg}{2\,tg\,\theta} \qquad (20)$$

che, sostituito nella (17) fornisce $F_s = \frac{Mg}{2\,tg\,\theta}$ (21)

che è la forza di attrito statico necessaria per mantenere ferma la scala e impedire che essa scivoli. D'altra parte, sappiamo che il modulo della forza di attrito statico non può mai superare il valore massimo $\mu_s R_2 = \mu_s M g$. Dunque

$$\frac{Mg}{2\,tg\theta} \le \mu_s M g \quad \Rightarrow \quad tg\theta \ge \frac{1}{2\mu_s} \quad \Rightarrow \quad \theta \ge \theta_{min} = arctg\left(\frac{1}{2\mu_s}\right) \qquad (22)$$

XXIII-4 - EQUIVALENZE FRA MOTO TRASLATORIO E ROTATORIO

Concludiamo questa lezione rimarcando ancora una volta che esistono profonde analogie fra alcune grandezze che caratterizzano il moto traslatorio di un punto lungo un asse x e quelle che caratterizzano il moto rotatorio attorno ad un asse z. Tenere presente queste analogie è estremamente utile per una più facile memorizzazione delle equazioni del moto rotatorio. Le principali equivalenze sono riassunte nel seguito:

$$x(t) \longrightarrow \theta(t)$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t) \longrightarrow \omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t) \longrightarrow \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t)$$

la causa del moto traslatorio è $\vec{F} \longrightarrow$ la causa del moto rotatorio è $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ momento di forza

$$F_x \longrightarrow \tau_z$$

L'inerzia al moto traslatorio è data dalla massa $m \longrightarrow$ l'inerzia al moto rotatorio attorno ad un asse è $I = m r^2$ momento di inerzia

quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v} \longrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momento della q.m.

$$p_x = m v_x \longrightarrow L_z = I \omega_z$$

Se si tengono in conto queste analogie, tutte le relazioni principali ottenute riguardo al moto rotatorio possono essere dedotte immediatamente dalle analoghe relazioni per il moto traslatorio. Esempi:

a) Energia cinetica $\frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow \frac{1}{2} I \omega^2$

b) potenza $\vec{F} \cdot \vec{v} \longrightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

in particolare per un moto traslatorio lungo x e un moto rotatorio attorno a z

$$F_x v_x \longrightarrow \tau_z \omega_z$$

c) $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

d) $F_x = m a_x \longrightarrow \tau_z = I \alpha_z$

c) lavoro in uno spostamento infinitesimo $F_x dx \longrightarrow \tau_z d\theta$