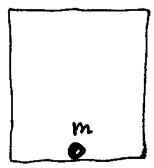
Esercizi

Esercizio 1

In un contenitore adiabatico si trovano inizialmente in uno stato di non equilibrio un corpo solido di massa m, calore specifico c e temperatura T_1 e un gas ideale monoatomico con n moli, temperatura T_2 che occupa il volume V. Si calcoli:



1 - la temperatura all'equilibrio

2 - la variazione di energia interna del corpo

3 - la pressione finale del gas.

Soluzione. Il calore totale assorbito dal sistema è $Q=0$ (contenitore adiabatico) dunque:

$$Q_1+Q_2=0 \Rightarrow cm(T-T_1)+Q_2=0 \qquad (1)$$

dove $cm(T-T_1)$ è il calore assorbito dal corpo è $Q_2 = C_V(T-T_2)=\frac{3}{2}nR(T-T_2)$ è il calore assorbito dal gas (trasformazione isocora: $L=0$ $Q_2=\Delta U$).

Dunque
$$cm(T-T_1)+\frac{3}{2}nR(T-T_2)=0$$

$$\Rightarrow \qquad T=\frac{cmT_1+\frac{3}{2}nRT_2}{cm+\frac{3}{2}nR} \qquad (2)$$

2- Poiché il volume del corpo è praticamente costante (corpo solido)
$\Delta U=-L+Q=Q$ essendo $L=0$ poiché $V=$costante.

$$\Rightarrow \qquad \Delta U = mc(T-T_1) \qquad (3)$$

3- Alla fine il sistema si trova in equilibrio termico e, quindi,

$$pV=nRT \qquad \Rightarrow p=\frac{nRT}{V} \qquad (4)$$

dove T è dato nella 2

Esercizio 2 - Un gas perfetto si trova inizialmente in condizioni di equilibrio all'interno di un cilindro adiabatico chiuso da un pistone adiabatico. Il gas si trova inizialmente a pressione $p = 2p_0$ dove p_0 = pressione atmosferica. Il gas occupa il volume V_0 e si trova a temperatura T_0. All'esterno c'è l'atmosfera a pressione p_0. Inizialmente il pistone viene tenuto fermo applicando una opportuna forza. Ad un dato istante il pistone viene lasciato libero e il sistema raggiunge, in seguito, una condizione di equilibrio.

Si calcoli:

1 - Il volume finale del gas

2 - La temperatura finale del gas

3 - Il lavoro fatto dal gas

4 - Il calore assorbito dal gas

Si consideri trascurabile la massa del pistone.

Soluzione: 1- La trasformazione è NON REVERSIBILE poiché la pressione interna del gas è ben diversa da quella esterna ($2p_0 >> p_0$). La forza totale agente sul pistone sarà $(2p_0 - p_0)S = p_0 S >> 0$ e il pistone accelererà per poi compiere numerose oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio meccanico. Dopo un po' di tempo, però, il pistone si fermerà in tale posizione e il sistema si porterà in una condizione di equilibrio meccanico (pistone fermo e pressione interna del gas $p = p_0$) e termico (tutti i punti del gas avranno la stessa temperatura). Dunque, dalla legge dei gas perfetti,

$$V = \frac{nRT}{p_0} \qquad (1)$$

dove $$n = \frac{2p_0 V_0}{RT_0}$$ che, sostituito nella (1) fornisce

$$V = 2V_0 \frac{T}{T_0} \qquad (2)$$

la relazione (2) ha due incognite V e T, dunque è necessaria una nuova equazione che viene fornita dal 1° principio che, essendo $Q = 0$ (calore assorbito dal gas) diventa

$$L = \Delta U = \frac{3}{2} nR(T - T_0) \qquad (3)$$

dove L è il lavoro fatto sul sistema. Sul sistema, infatti, si esercita una pressione costante p_0 (pressione dell'atmosfera) che fa un lavoro

$$L = -p_0 (V - V_0) \qquad (4)$$

D'altra parte $nRT = p_0 V$ e $nRT_0 = 2 p_0 V_0$

che, sostituiti nella (3) forniscono

$$L = \frac{3}{2} p_0 V - \frac{3}{2} 2 p_0 V_0 = \frac{3}{2} p_0 (V - 2V_0) \qquad (5)$$

uguagliando i lavori in (4) e (5) si trova:

$$-p_0 V + p_0 V_0 = \frac{3}{2} p_0 V - 3 p_0 V_0 \qquad (6)$$

che fornisce $V = \frac{8}{5} V_0$ (7)

2 – Dalla (2) si deduce (sostituendo V in eq.(7))

$$T = 0.8\ T_0 \qquad (8)$$

3 – Il lavoro fatto dal gas è uguale ed opposto a quello fatto sul sistema

$$L_{gas} = -L = p_0 (V - V_0) \qquad (9)$$

Sostituendo V di eq.(7) si ottiene

$$L_{gas} = p_0 \frac{3}{5} V_0 \qquad (10)$$

4 – Il calore assorbito è $Q = 0$ essendo le pareti adiabatiche

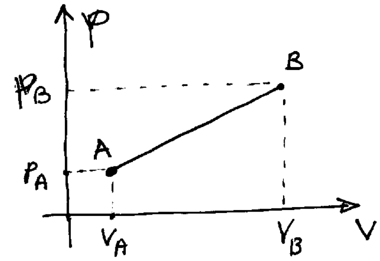
Osservazione: la temperatura finale del gas è minore di quella iniziale, cioè il gas si è raffreddato. Infatti, il gas compie lavoro > 0 e, quindi, l'energia interna diminuisce.

ATTENZIONE!: nella risoluzione dell'esercizio, abbiamo supposto trascurabile la massa m del pistone. In caso contrario, nel bilancio energetico si dovrebbe aggiungere la variazione di energia gravitazionale del pistone $\Delta U_p = mg(h - h_0)$.

Lo studente risolva l'esercizio nel caso di pistone di massa m supponendo nota la sezione A del cilindro.

Esercizio 3. Un gas ideale con n moli compie la trasformazione reversibile indicata in figura dallo stato V_A, P_A allo stato V_B, P_B. Sapendo che il gas è biatomico, si calcoli:

1 - Il lavoro fatto dal gas
2 - Il calore assorbito dal gas
3 - La variazione di temperatura
4 - Nel passare da A a B il gas passa attraverso stati intermedi a diverse temperature. Si dica quali condizioni devono verificare i parametri $V_A, P_A,\quad , n$ se si vuole che la temperatura nell'andare da A a B sia sempre crescente. (per questa domanda si assume $V_B = 2V_A$, $P_B = 3P_A$)



Soluzione: 1 - Il lavoro nell'andare da A a B è

$$L = \int_A^B p\,dV$$

che è dato dall'area (con segno positivo) delimitata dal segmento AB e dall'asse delle ascisse. Dunque

$$L = (P_A + P_B)\frac{(V_B - V_A)}{2} \quad \text{(area del trapezio)} \quad (1)$$

2 - $$Q = L + \Delta U = (P_A + P_B)\frac{V_B - V_A}{2} + nR(T_B - T_A)$$

ma $nRT_B = P_B V_B$ e $nRT_A = P_A V_A$ (2) Dunque

$$Q = \frac{P_A + P_B}{2}(V_B - V_A) + P_B V_B - P_A V_A \qquad (3)$$

3 - dalla 2 si deduce

$$\Delta T = T_B - T_A = \frac{P_B V_B}{nR} - \frac{P_A V_A}{nR} \qquad (4)$$

4) per un generico valore $V_A \leq V \leq V_B$, la pressione corrispondente si ottiene scrivendo l'equazione della retta passante per A e per B

$$P = P_A + \frac{P_B - P_A}{V_B - V_A}(V - V_A) = P_A + \frac{2P_A}{V_A}(V - V_A) \quad (5)$$

D'altra parte,

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{P_A}{nR}\left[2\frac{V^2}{V_A} - V\right] \qquad (6)$$

la relazione (6) descrive una parabola con concavità verso il basso che ha un minimo $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ in

$$V = \frac{V_A}{4} \qquad (7)$$

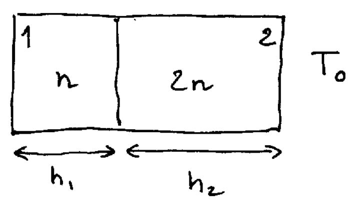
dunque, per ogni $V > \frac{V_A}{4}$, T è una funzione crescente di V. In particolare T sarà sempre una funzione crescente di V nell'intervallo $[V_A, V_B]$.

<u>Esercizio 4</u>. Un cilindro chiuso di sezione S e altezza $2h$ contiene al suo interno una parete mobile di spessore trascurabile. All'istante iniziale, la parete viene tenuta ferma in modo da dividere il cilindro in due parti 1 e 2 di altezza h riempite, rispettivamente con n e $2n$ moli dello stesso gas perfetto. Tutte le pareti sono buoni conduttori termici e il sistema è immerso in un termostato a temperatura T_0. Si calcoli:

1 – la forza agente sulla parete mobile all'istante iniziale.

Ad un dato istante, la parete viene lasciata libera e si attende il ristabilimento dell'equilibrio. Si trovi:

2 – le altezze h_1 e h_2 delle due sezioni di cilindro all'equilibrio.



Soluzione:

1 – Inizialmente le pressioni dei gas nelle sezioni 1 e 2 sono, rispettivamente

$$p_1 = \frac{nRT_0}{Sh} \quad ; \quad p_2 = \frac{2nRT_0}{Sh} \qquad (1)$$

Dunque c'è una forza netta agente sulla parete mobile diretta da destra verso sinistra e pari a

$$F = (p_2 - p_1)S = \frac{nRT_0}{h} \qquad (2)$$

2 - All'equilibrio, poiché tutte le pareti sono conduttrici termicamente, la parete raggiungerà una nuova posizione di equilibrio meccanico ($p_1 = p_2$) con i due gas ancora alla stessa temperatura T_0.
Dunque

$$\frac{nRT_0}{S h_1} = \frac{2nRT_0}{S h_2} \qquad (3)$$

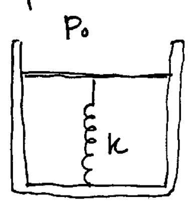
$$\Rightarrow \quad h_2 = 2 h_1 \qquad (4)$$

d'altra parte $\quad h_1 + h_2 = 2h \qquad (5)$

Risolvendo il sistema (4), (5) si ottiene

$$h_1 = \frac{2}{3} h \quad e \quad h_2 = \frac{4}{3} h \qquad (6)$$

Esercizio 5 Un cilindro contiene un gas a pressione atmosferica p_0 e a temperatura ambiente T_0. Il cilindro è chiuso da un pistone mobile di massa trascurabile e sezione A. In condizioni di equilibrio il gas occupa un volume V_0. Il pistone è collegato alla superficie inferiore del cilindro con una molla di massa trascurabile e costante elastica K. Inizialmente la molla si trova in condizioni di riposo e la pressione nello spazio esterno al cilindro è p_0. Se la temperatura esterna diventa $T > T_0$, quale è l'allungamento della molla all'equilibrio se la pressione esterna resta uguale a p_0?



Soluzione: All'equilibrio deve essere:

$$pV = nRT \qquad (1)$$

ma n si ottiene dai valori iniziali:

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \qquad (2)$$

che, sostituito nella (1) fornisce $\qquad pV = p_0 V_0 \frac{T}{T_0} \qquad (3)$

Abbiamo due incognite, P e V, per cui è necessaria un'altra equazione che viene fornita dall'equilibrio meccanico del pistone. La forza totale sul pistone deve essere nulla. La forza totale è la somma della forza elastica $F = -K\Delta x$ rivolta verso il basso e della forza totale di pressione $(p - p_0)A$ diretta verso l'alto ($-p_0$ tiene conto della forza esercitata dall'atmosfera esterna)

$$(p-p_0)A - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + \frac{k\,\Delta x}{A} \qquad (4)$$

Dobbiamo ora esprimere Δx in funzione dei volumi V e V_0:

$$A\,\Delta x = (V - V_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{V}{A} - \frac{V_0}{A} \qquad (5)$$

che, sostituita nella (4) fornisce

$$p = p_0 + k\frac{V}{A^2} - k\frac{V_0}{A^2} \qquad (6)$$

la (3) e la (6) sono un sistema di <u>DUE</u> equazioni in <u>DUE</u> incognite p e V. Sostituendo p dato dalla (6) nella (3) si trova:

$$V^2 + \left(p_0\frac{A^2}{k} - V_0\right)V - \frac{p_0 V_0 A^2 T}{k T_0} = 0 \qquad (6)$$

la cui soluzione generale è

$$V = \frac{V_0 - p_0 A^2/k \pm \sqrt{\left(V_0 - p_0\frac{A^2}{k}\right) + \frac{4 p_0 V_0 A^2 T}{k T_0}}}{2} \qquad (7)$$

Delle due soluzioni solamente quella con il segno + ha significato fisico perché quella con il segno − corrisponde ad un volume $V < 0$ che, ovviamente, non ha significato. Una volta noto V dato dalla (7), l'allungamento Δx richiesto si ottiene sostituendo V nella (5).

<u>Esercizio 5</u> Una caraffa di capacità termica $C_T = 300$ cal/°C contiene 1 litro di acqua alla temperatura $T_a = 20$°C. Si vuole raffreddare l'acqua fino a raggiungere una temperatura finale $T_f = 5$°C sciogliendo in essa dei cubetti di ghiaccio di lato $L = 2$ cm alla temperatura $T_g = -5$°C. Quanti cubetti di ghiaccio sono necessari se sono trascurabili gli scambi di calore con l'esterno? Si assumano i seguenti valori:

Calore specifico acqua : $c_a = 10^3$ cal/°C Kg

calore " ghiaccio : $c_g = 0.5 \times 10^3$ cal/°C Kg

calore latente fusione ghiaccio : $c_L = 0.795 \times 10^5$ cal/°C

densità ghiaccio : $\rho_g = 920$ Kg/m³

Soluzione: Non essendovi scambi di calore con l'esterno, il calore totale assorbito dal recipiente, dall'acqua e dal ghiaccio deve essere nullo. Dunque

$$Q_{tot} = Q_{ghiaccio} + Q_{acqua} + Q_{recipiente} = 0 \qquad (1)$$

Ma il calore assorbito dal ghiaccio è

$$Q_{ghiaccio} = C_g\,(0°C - T_g)M_g + C_L M_g + C_a\,(T_f - 0°C)M_g =$$
$$= (0.5\times10^3 \times 5 + 79.5\times10^3 + 10^3\times 5)\,M_g = 87 \times 10^3\, M_g$$

Il calore assorbito dall'acqua è negativo (l'acqua si raffredda) e pari a

$$Q_{acqua} = c_a M_a\,(T_f - T_a) = -10^3 \times 1 \times 15 \text{ cal} = -15 \times 10^3 \text{ cal}$$

Quello assorbito dal recipiente è

$$Q_{recipiente} = C_T(T_f - T_e) = -300 \times 15 \text{ cal} = -4.5 \times 10^3 \text{ cal}$$

sostituendo questi valori nella (1) si trova:

$$87\times10^3\, M_g = +19.5 \times 10^3 \Longrightarrow M_g = 0.224 \text{ kg}$$

Dunque, il volume V_g di ghiaccio da scegliere è:

$$V_g = \frac{M_g}{\rho_g} = \frac{0.224}{920}\ m^3 = 243 \times 10^{-6}\ m^3 = 243\ cm^3$$

Poiché ogni cubetto occupa un volume $V = L^3 = 8\ cm^3$, sono necessari

$$N = \frac{V_g}{V} = \frac{243}{8} = 30.4 \simeq 31 \text{ cubetti}.$$

Esercizio 8* Se, durante il processo, una certa quantità di calore $Q^* = 2000$ cal viene assorbita dal sistema dall'ambiente esterno, come cambia la risposta precedente?

Soluzione: In questo caso, la quantità totale di calore assorbito dal sistema non è più $Q_{TOT} = 0$ (sistema isolato) ma è pari a $Q_{TOT} = Q^*$. Dunque:

$$Q^* = Q_{Tot} \Rightarrow 87\times10^3 M_g = (19.5 + 2)\times10^3 = 21.5\times10^3$$

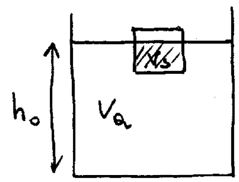
di conseguenza $M_g \to 0.247$ kg e $V_g \to 268\ cm^3$

e, infine, $N = 33.6 \simeq 34$ cubetti

Es. 7 – Un cubetto di ghiaccio di volume V_g galleggia nell'acqua di volume V_a contenuta in un contenitore cilindrico di superficie di base A. Se ρ_g è la densità del ghiaccio ($\rho_g = 920$ kg/m^3) e ρ_a quella dell'acqua ($\rho_a \sim 1000$ kg/m^3), si trovi:

a) Il livello h_0 dell'acqua

b) si mostri che il livello resta inalterato quando il ghiaccio si scioglie interamente.



Soluzione: a) Il volume di ghiaccio sommerso è V_s ed è tale da avere equilibrio fra la forza peso $M_g\, g = \rho_g V_g\, g$ e la forza di Archimede $\rho_a V_s\, g$. Dunque:

$$V_s = \frac{\rho_g}{\rho_a} V_g = 0.92\, V_g \qquad (1)$$

Il volume totale $V_s + V_a$ è pari ad $A\, h_0$ (vedi figura), dunque:

$$h_0 = \frac{V_a + V_s}{A} = \frac{V_a + \frac{\rho_g}{\rho_a} V_g}{A} \qquad (2)$$

b) Quando tutto il ghiaccio si è sciolto, esso occupa un volume:

$$V^* = \frac{M_g}{\rho_a} \Rightarrow V^* = \frac{\rho_g}{\rho_a} V_g = V_s \text{ . Ma allora,}$$

$$h = \frac{V_a + V_s}{A} = h_0$$

cioè il livello dell'acqua resta inalterato.

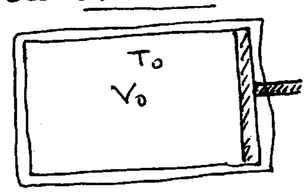
OSSERVAZIONE: Per il calcolo precedente abbiamo considerato del tutto trascurabili le variazioni di volume dell'acqua e del contenitore dovute alla variazione di temperatura del sistema, cioè abbiamo trascurato la piccola dipendenza dalla temperatura della densità dell'acqua. Inoltre, abbiamo trascurato la piccola dipendenza della densità dell'acqua dalla temperatura. Infatti, dopo che il ghiaccio si è sciolto, la temperatura finale dell'acqua è più bassa di quella iniziale. Ne consegue che, se ρ_a varia con la temperatura, il volume occupato dall'acqua e, quindi, il livello h subirà una piccola variazione.

Esercizio 8 – ~~In~~ Un cilindro a pareti adiabatiche può scorrere senza attrito un pistone adiabatico. Inizialmente una mole di gas ideale monoatomico occupa il volume V_0 e si trova in equilibrio a temperatura T_0. Con una compressione reversibile il volume viene portato a $V_1 = \frac{V_0}{10}$. Dopodiché viene aperta una valvola nel pistone e il gas si espande nuovamente nel cilindro fino a rioccupare il volume iniziale. Il lavoro complessivo fatto dal gas vale <u>in modulo</u> $W = 1 \cdot 10^4$ J.

Si calcoli:

1 – la temperatura iniziale T_0 del gas

2 – la temperatura finale del gas



Soluzione: 1 – Il lavoro fatto dal gas è negativo, quindi $L = -W$, essendo una compressione adiabatica (la forza di pressione è opposta allo spostamento del pistone). Il lavoro è

$$L = \int_{V_0}^{V_0/10} p\, dV = \int_{V_0}^{V_0/10} \frac{p_0 V_0^{\beta}}{V^{\beta}}\, dV = p_0 V_0^{\beta}\, V^{1-\beta}\Big|_{V_0}^{V_0/10} = -3.64\, p_0 V_0 \quad (1)$$

dove abbiamo usato la relazione $p V^{\beta} = p_0 V_0^{\beta}$. D'altra parte, per la legge dei gas perfetti, $p_0 V_0 = R T_0$. Inoltre $L = -W = -10^4$ J. Sostituendo queste espressioni nella (1) si ottiene:

$$3.64\, R T_0 = 10^4 \implies T_0 = \frac{10^4}{3.64 R} = 330 \text{ K} = 57^\circ\text{C} \quad (2)$$

2 – La temperatura finale T_f si ottiene utilizzando la relazione generale che lega V e T per una adiabatica reversibile:

$$\frac{V_f}{V_0} = \left(\frac{T_0}{T_f}\right)^{3/2} \Rightarrow T_f = T_0 \left(\frac{V_0}{V_f}\right)^{2/3} = (10)^{2/3}\, T_0 = 1.53\, 10^3 \text{ K} = 1.26\, 10^3\, {}^\circ\text{C}$$