**Esercizio 1** – Un gas monoatomico contiene $n=1$ moli e compie la trasformazione ciclica $A \to B \to C \to A$ mostrata in figura. Si trovi

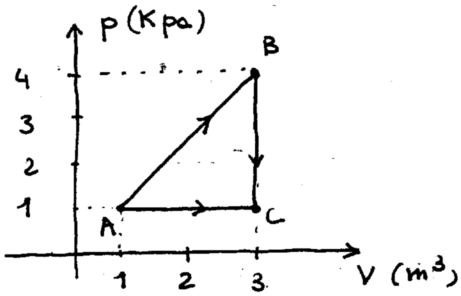
a) In quali tratti ($A \to B$, $B \to C$, $C \to A$) la temperatura del gas aumenta e in quali diminuisce.

b) la variazione totale di energia interna nel ciclo

c) I calori assorbiti dal gas e il lavoro fatto nei singoli tratti $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$.

d) Il rendimento $\eta$ definito come il lavoro $W$ diviso per i calori assorbiti ($>0$) dalle sorgenti calde.

e) Si dica se il sistema funziona da motore o come pompa di calore.




Soluzione: a) $p_A V_A = 1kJ$, $p_B V_B = 12kJ$; $p_C V_C = 3kJ$

poiché $pV = nRT$ le temperature dei punti A, B e C sono nell'ordine $T_A < T_C < T_B$. Dunque:

$A \to B$ : T aumenta
$B \to C$ : T diminuisce
$C \to A$ : T diminuisce

---

b) $\Delta U = U_{finale} - U_{iniziale} = U(A) - U(A) = 0$

---

c) • Tratto $A \to B$ : La pressione $p$ e il volume $V$ variano in modo lineare durante la trasformazione. Infatti,

$$\frac{p - p_A}{V - V_A} = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A} = \frac{3}{2} 10^3 \frac{Pa}{m^3} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad p = p_A + \frac{3}{2}(V - V_A) \times 10^3 \qquad (2)$$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\, dV = p_A (V_B - V_A) + \frac{3}{4}(V_B - V_A)^2 \times 10^3 \qquad (3)$$

$$W_{AB} = \left(2 + \frac{3}{4}\, 4\right) kJ = 5 kJ$$

(più rapidamente si poteva arrivare al risultato osservando che il lavoro è l'area del trapezio di base minore 1 Kpa, base maggiore 4 KPa e altezza 2 $m^3$)

$$\Delta U = U(T_B) - U(T_A) = \frac{3}{2} R T_B - \frac{3}{2} R T_A = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 11 \ J = 16.5 kJ$$

$$Q_{AB} = \Delta W + W = 21.5 kJ \qquad (4)$$

- Tratto BC $\qquad V = \text{cost} \Rightarrow W_{BC} = 0$

$$\Rightarrow \quad Q_{BC} = \Delta U = U(T_C) - U(T_B) = \frac{3}{2} R (T_C - T_B) =$$

$$= \frac{3}{2}(p_C V_C - p_B V_B) = \frac{3}{2}(-9) J = -13.5 kJ \qquad (5)$$

- Tratto CA $\qquad p = \text{cost} = p_C \Rightarrow W_{CA} = p_C (V_A - V_C) = -2 kJ \quad (6)$

$$\Delta U = U(A) - U(C) = \frac{3}{2} R T_A - \frac{3}{2} R T_C = \frac{3}{2}(p_A V_A - p_C V_C)$$

$$= -3 kJ$$

$$Q_{CA} = \Delta U + W = (-3 - 2) kJ = -5 kJ \qquad (7)$$

---

d) I calori assorbiti sono quelli positivi, cioè solamente $Q_{AB} = 21.5$ J. Il lavoro totale è $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 3 kJ$ che corrisponde all'area del triangolo ABC. Dunque,

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{3}{21.5} \simeq 0.14 \qquad (8)$$

---

e) Il lavoro fatto dal sistema è $W > 0$, dunque la macchina funziona da motore.

Esercizio 2 : Un operatore comprime un gas perfetto biatomico che si trova inizialmente a pressione $p_0 = 2000$ pa con volume $V_0 = 3\ m^3$ e temperatura $T_0 = 300$ K. La compressione avviene in modo reversibile e il volume finale è $V_f = 1\ m^3$. In questa trasformazione, il lavoro fatto dall'operatore è $W_0 = 5$ KJ, mentre una quantità di calore $Q_0 = 500$ cal viene ceduta ai termostati. Quale è la temperatura finale $T_f$ e la pressione finale $p_f$? 

Soluzione: Il lavoro fatto dal gas è

$$W = -W_0 = -5 \times 10^3 \text{ J} \qquad (1)$$

mentre il calore assorbito dal gas è

$$Q = -Q_0 = -500 \text{ cal} = -2093 \text{ J} \qquad (2)$$

La variazione di energia interna è, perciò, (gas biatomico)

$$\Delta U = Q - W = 2907 \text{ J} \qquad (3)$$

ma

$$\Delta U = \frac{5}{2} n R T_f - \frac{5}{2} n R T_0 = \frac{5}{2} p_f V_f - \frac{5}{2} p_0 V_0$$

dunque,

$$p_f = \frac{5/2\, p_0 V_0 + 2907 \text{ J}}{5/2\ m^3} = 7163 \text{ pa} \qquad (4)$$

D'altra parte, per la legge dei gas perfetti, essendo n = costante,

$$\frac{p_f V_f}{T_f} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow \frac{p_f}{T_f} = \frac{p_0 V_0}{T_0 V_f} = 20\ \text{J/K m}^3 = 20\ \frac{\text{pa}}{\text{K}} \qquad (5)$$

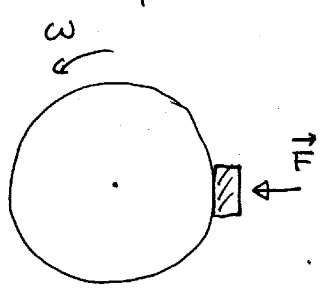
Sostituendo il valore di $p_f$ dato in eq. (4) nella (5) si trova

$$T_f = \frac{p_f}{20\ \text{pa/K}} = \frac{7163}{20}\ \text{K} = 358\ \text{K} \qquad (6)$$

Esercizio 3: Un cilindro di massa $M_c = 1\,Kg$ e raggio $R = 20\,cm$ ruota attorno ad un asse passante per il suo centro con attrito trascurabile e ha un'energia cinetica associata al moto di rotazione $E_c = 100\,J$. Il cilindro ha calore specifico $c_c = 0.3\ cal/g\,°C$. Un blocchetto di alluminio di massa $m = 10\ g$ e calore specifico $c = 0.215\ cal/g\,°C$ viene premuto sul bordo del cilindro rotante finché esso si ferma completamente. Si assuma che durante il frenaggio, l'energia si ripartisca in parti uguali fra cilindro e blocchetto e che la temperatura del cilindretto sia, ad ogni istante uniforme. Si assuma, inoltre, che il calore scambiato fra cilindro e piastra sia trascurabile durante il frenaggio e che il sistema cilindro + blocchetto sia isolato termicamente. In queste ipotesi si calcoli:

a) la temperatura raggiunta dal blocchetto di alluminio quando il cilindro si è arrestato. La temperatura iniziale del sistema è $T_0 = 300\,K$.

b) si discutano quali sono gli effetti trascurati per il calcolo precedente e si dica se, nel caso reale, la temperatura del blocchetto è più alta o più bassa di quella calcolata in precedenza.




Soluzione: a) Quando il blocchetto viene premuto sul cilindro, si origina una forza di attrito dinamico che frena il disco. Quando il disco si è fermato, l'energia cinetica perduta è

$$K_{diss} = E_c = 100\ J \qquad (1)$$

Questa energia si trasforma in energia interna del cilindro e del blocchetto. Poiché, per ipotesi, l'energia persa si ripartisce in parti uguali fra blocchetto e cilindro, l'energia interna acquistata dal blocchetto è

$$\Delta U_b = \frac{E_c}{2} = 50\ J \qquad (2)$$

Poiché, per ipotesi, la temperatura del blocchetto è omogenea, e il blocchetto ha calore specifico c, la variazione di energia interna è

$$\Delta U_b = mc\ \Delta T \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = T_f - T_o = \frac{E_c}{2mc}$$

$$c = \frac{0.215 \times 4.186}{10^{-3}}\ J/_{kg\,°C} = 900\ J/_{kg\,°C} \quad , m = 0.01 kg$$

$$\Rightarrow \quad T_f = (T_o + \Delta T) = (300 + 5.5)\ K = 305.5 K \qquad (5)$$

b) In questo calcolo abbiamo trascurato il fatto che in un sistema reale si ha sempre un po' di perdita di calore del blocchetto verso l'ambiente. Inoltre una parte dell'energia meccanica si può convertire in forme di energia diverse dall'energia termica: 1) si può avere la produzione di suono con conseguente perdita di energia sotto forma di onde sonore.
2) Nella frizione una parte di energia può andare persa in un processo di rinottura del pezzetto di alluminio (alcuni granelli di alluminio vengono strappati via e questo comporta un lavoro fatto per vincere le forze di attrazione).
3) Poiché l'alluminio ha una massa molto minore di quella del cilindro, esso tenderà ad assumere una temperatura più alta di quella del cilindro e, quindi vi sarà passaggio di calore dell'alluminio verso il cilindro.
Tutti questi processi portano ad una riduzione dell'energia <u>termica</u> trasferita al blocchetto e, quindi, una minore variazione di temperatura di questo.

Esercizio 4 – Un corpo che si trova a temperatura $T_A$ all'istante $t=0$ in un termostato a temperatura $T_0$ ($T_A > T_0$) cede calore al termostato secondo la legge (legge di Newton del raffreddamento)

$$\frac{dQ}{dt} = -a\,(T-T_0)$$

dove $T$ è la temperatura istantanea del corpo, $a>0$ è una costante e $Q$ è il calore assorbito dal corpo. Se il corpo ha capacità termica $C_T$, si trovi come varia la temperatura del corpo in funzione del tempo assumendo che la temperatura del corpo sia uniforme ad ogni istante.

Soluzione: In un tempo infinitesimo $dt$, il calore assorbito dal corpo ad un generico istante in cui ha temperatura $T$ è

$$dQ = -a\,(T-T_0)\,dt \qquad (1)$$

Questo calore corrisponde ad una variazione di temperatura

$$C_T\,dT = dQ \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \qquad dT = -\frac{a\,(T-T_0)}{C_T}\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{a}{C_T}(T-T_0) \qquad (3)$$

la (3) è un'equazione differenziale a variabili ($T$ e $t$) separabili. Infatti, essa può essere scritta nella forma:

$$\frac{dT}{T-T_0} = -\frac{a}{C_T}\,dt \qquad (4)$$

Integrando i due termini a partire dall'istante iniziale $t=0$ ($T=T_A$) fino ad uno finale generico $t$ ($T=T$) si trova

$$\int_{T_A}^{T} \frac{dT}{T-T_0} = \int_0^t -\frac{a}{C_T}\,dt \qquad (5)$$

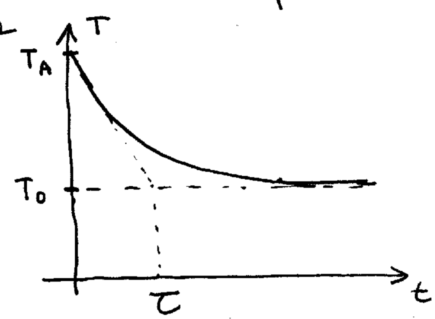
la cui soluzione è:

$$\ln\left(\frac{T-T_0}{T_A-T_0}\right) = -\frac{a}{C_T}\,t \qquad (6)$$

La (6) può essere riscritta nella forma equivalente:

$$\frac{T-T_0}{T_A-T_0} = e^{-\frac{a}{c_T}t} \Rightarrow T = T_0 + (T_A - T_0)\, e^{-t/\tau} \qquad (7)$$

dove abbiamo definito il TEMPO DI RILASSAMENTO TERMICO $\tau = \frac{c_T}{a}$. Per $t \gg \tau$ $T \simeq T_0$, cioè il sistema si è portato in equilibrio termico con il termostato. In pratica, già per $t \simeq 3\tau$ si può assumere con buona approssimazione $T \sim T_0$. L'andamento della temperatura $T$ in funzione del tempo è riportato in figura




Esercizio 5 - Una casa si trova in un ambiente esterno a temperatura $T_1 = -5\,°C$. Si vuole mantenere la temperatura interna nella casa a $T_2 = 22\,°C$. Se la perdita di calore per unità di tempo attraverso le pareti e il tetto è di 5000 J/s, si calcoli la potenza elettrica necessaria per mantenere costante la temperatura interna nei due casi:

a) L'energia elettrica viene inviata a delle stufe elettriche.

b) L'energia elettrica aziona un motore elettrico che mette in funzione il compressore in una pompa di calore. Il COP della pompa di calore è il 60% del massimo valore teorico di un ciclo di Carnot che opera fra le due temperature date.

Soluzione: a)

In questo caso tutta la potenza elettrica viene trasformata in energia termica.

Se non vi fosse perdita di calore dalla stanza, la potenza elettrica fornita alla stufa si trasmetterebbe in aumento dell' energia interna della stanza $\Delta U$. Se la temperatura della stanza è costante, significa che una uguale quantità di energia abbandona la stanza sotto forma di calore. Poiché la potenza è pari alla variazione di energia nell'unità di tempo, allora

$$P = \frac{dQ}{dt} \qquad (1)$$

dove $\frac{dQ}{dt}$ è il calore ceduto dalla stanza all'ambiente esterno e $P$ è la potenza elettrica, dunque:

$$\frac{dQ}{dt} = 5000 \text{ J/s} \Rightarrow P = 5000 \text{ J/s} \qquad (2)$$

b) Il COP teorico di una pompa di calore che compie un ciclo di Carnot fra le temperature $T_f = T_1 = -5°C$ cioè $T_f = -268$ K e $T_c = T_2 = 22°C = 295$ K è

$$COP^* = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{295}{27} = 10.9 \qquad (3)$$

Poiché il COP reale della macchina è 60% di $COP^*$,

$$COP = 0.6 \times 10.9 = 6.55 \qquad (4)$$

D'altra parte

$$\frac{Q_c}{W} = 6.55 \Rightarrow Q_c = 6.55\, W \qquad (5)$$

Dove $Q_c$ è il calore che la pompa cede all'ambiente interno della stanza. Se vogliamo che la temperatura della stanza

non vari, il calore $Q_c$ assorbito dalla stanza
per effetto del ciclo termico deve uguagliare il calore Q
che fuoriesce dalle pareti. Dunque

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 5000\ J/s \qquad (6)$$

ma, allora, per la (5) $\left( \frac{dQ_c}{dt} = 6.55\,\frac{dW}{dt} = 6.55\,P \right)$, si ha

$$P = \frac{5000}{6.55}\,J/s = 763\ J/s \qquad (7)$$

Confrontando i valori di P in equazioni (2) e (7) si vede
chiaramente che la pompa di calore è molto più efficiente.
L'efficienza sarebbe la stessa solamente nel caso speciale in cui
COP = 1.