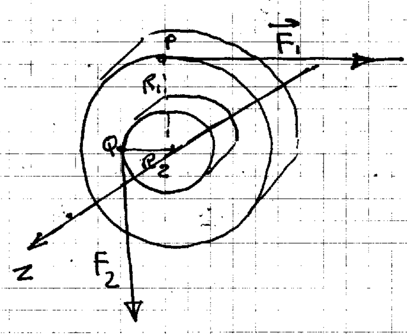
Esercizio 1: Un cilindro è rappresentato come mostrato in figura ed è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse z centrale. Una fune è avvolta sul tamburo di raggio R_1 ed una su quello di raggio R_2. I due pezzi di forma cilindrica hanno la stessa massa M. Le funi vengono tirate in modo da esercitare le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ di modulo F_1 e F_2 dirette come in figura. Se $R_2/R_1 = \frac{1}{2}$

a) per quale valore del rapporto F_1/F_2 il cilindro non ruota?

b) Supponendo $F_1 = F_2 = 10\,N$, $R_1 = 10\,cm$, $R_2 = 5\,cm$ e $M = 0.5\,Kg$, quale è l'accelerazione angolare (modulo e verso) del sistema?



Soluzione: a) le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono applicate dalla fune nei punti P e Q a distanze R_1 e R_2 dall'asse. Dunque, le componenti dei momenti di forza $\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ e $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ lungo l'asse z di rotazione sono dati, in valore assoluto, dal prodotto dei moduli delle forze per i rispettivi bracci R_1 e R_2. Dalla regola della mano destra si deduce che τ_{1z} è negativo (cioè diretto in verso opposto al verso positivo dell'asse z in figura ($\vec{F}_1$ tende a far ruotare il cilindro in verso orario), mentre τ_{2z} è positivo. Dunque

$$\tau_z = \tau_{2z} + \tau_{1z} = \tau_2 - \tau_1 = R_2 F_2 - R_1 F_1 \qquad (1)$$

Perché il corpo resti fermo, deve essere $\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = 0$, dunque

$$\tau_z = R_2 F_2 - R_1 F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

b) $$\tau_z = F_2 R_2 - F_1 R_1 = 10\,N \times 5 \times 10^{-2}\,m = 0.5\,N \times m \qquad (3)$$

Il momento di inerzia totale I è la somma dei momenti di inerzia dei due pezzi cilindrici $I_1 = M_1 \frac{R_1^2}{2}$, $I_2 = M_2 \frac{R_2^2}{2}$ dunque

$$I = M \frac{R_1^2}{2} + M \frac{R_2^2}{2} = 0.312 \times 10^{-2}\,Kg \times m^2 \qquad (4)$$

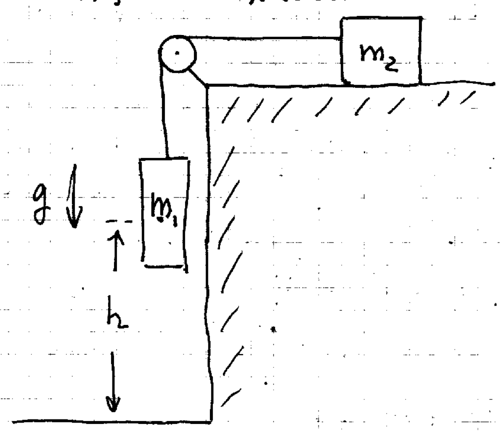
Di conseguenza: $\alpha_z = \dfrac{\tau_z}{I} = \dfrac{F_2 R_2 - F_1 R_1}{\frac{M}{2}(R_1^2+R_2^2)} = \dfrac{50}{0.312}$ rad/s

Esercizio 2. Due masse m_1 e m_2 sono collegate da una fune inestensibile e di massa trascurabile adagiata su una puleggia cilindrica di massa M e raggio R come mostrato in figura. La massa m_2 scivola su un piano orizzontale privo di attrito e la puleggia ruota attorno ad un asse privo di attrito. La fune non scivola rispetto alla puleggia ma ruota solidalmente con questa.

a) Si calcoli l'accelerazione angolare α delle puleggia e la tensione del pezzo di fune a contatto con m_1.

b) Supponendo che m_1 si trovi inizialmente ferma ad altezza h da un pavimento, quale velocità avrà quando tocca il pavimento? Si faccia il calcolo utilizzando argomenti energetici.

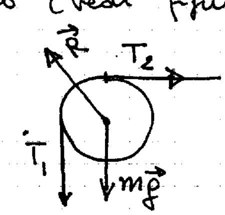
c) Se ora il piano su cui scivola m_2 ha un coefficiente di attrito μ_s, quale è il valore minimo di m_1 perché il sistema si metta in movimento?



Soluzione:

a) Innanzitutto osserviamo che, avendo la puleggia un momento di inerzia $I = M\dfrac{R^2}{2}$, essa potrà acquistare una accelerazione angolare α solo se su di essa si esercita un momento di forza diverso da zero rispetto all'asse.

Le forze applicate sulla puleggia sono: la reazione $\vec{R}$ dell'asse attorno al quale essa ruota, la forza peso applicata al centro di massa (nell'asse di rotazione), le forze $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ di tensione del filo (vedi figura sotto). Le uniche forze in grado di dare un momento di forza rispetto ad un polo posto nell'asse sono le forze $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ essendo $\vec{R}$ e $m\vec{g}$ applicate in un punto nell'asse.

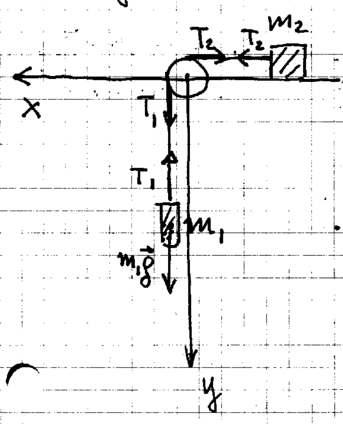


Scegliendo come verso positivo dell'asse z passante per il centro della carrucola quello uscente, si vede dalla regola della mano destra che i momenti di forza dovuti a $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ sono opposti. La componente z del momento di forza risultante rispetto all'asse è:

$$\tau_z = T_1 R - T_2 R = (T_1 - T_2) R = I \alpha_z \qquad (1)$$

poiché $\tau_z = I \alpha_z$, T_1 e T_2 devono essere diversi! Dunque la tensione della corda nei due pezzi a contatto con m_1 e m_2 è diversa.

I corpi m_1 e m_2 si muovono, rispettivamente lungo l'asse y verticale e x orizzontale. Se si sceglie il verso positivo degli assi come in figura, le equazioni del moto dei due corpi sono:



$$T_2 = m_2 a_{2x} \qquad (2)$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_{1y} \qquad (3)$$

dove a_{2x} e a_{1y} sono le componenti x e y delle accelerazioni dei corpi di massa m_1 e m_2.

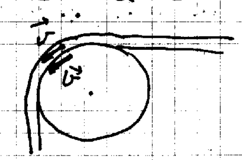
Ora le equazioni (1),(2),(3) contengono 5 incognite $T_1, T_2, \alpha_z, a_{1y}, a_{2x}$.

Dunque sono necessarie altre due equazioni.

Queste equazioni si ottengono tenendo conto del fatto che la fune è inestensibile e che la carrucola viene trascinata dalla fune (questo è vero se l'attrito fra fune e carrucola è sufficiente).

L'inestensibilità della fune implica che $a_{2x} = a_{1y} = a$ (4)

Il fatto che la fune trascini la carrucola implica che il pezzetto di fune che è a contatto con la carrucola si muove insieme ad esse. Dunque, la velocità e l'accelerazione tangenziale di un punto nella carrucola in contatto con la fune deve essere la stessa.



Ma l'accelerazione tangenziale della fune è a, mentre quella di un punto sul bordo della carrucola è $\alpha_z R$, dunque $a = \alpha_z R$ (5)

in conclusione se indichiamo con a il modulo dell'accelerazione,

$$a_{1y} = a$$
$$a_{2x} = a \qquad (6)$$
$$\alpha_z = \frac{a}{R}$$

Sostituendo queste espressioni nelle (1),(2),(3) si ottiene:

$$(T_1 - T_2)R = I\frac{a}{R} = M\frac{R^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{M}{2}Ra \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{M}{2}a \qquad (7)$$

$$T_2 = m_2 a \qquad (8)$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad (9)$$

La soluzione del sistema (7)-(8) nelle tre incognite T_1, T_2, a è:

$$a = \frac{m_1 g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \quad ; \quad T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} a \quad ; \quad T_1 = \frac{m_1\left(m_2 + \frac{M}{2}\right)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \qquad (10)$$

b) In via di principio, il moto di m_1 è un moto uniformemente accelerato per cui la velocità v quando il corpo si è spostato di un tratto h può essere ottenuta utilizzando le solite formule valide per il moto uniformemente accelerato.

Qui, però, si chiede di fare il calcolo utilizzando ragionamenti energetici. Infatti, per ipotesi non vi sono forze di attrito dinamico e, quindi, l'energia totale meccanica si deve conservare. All'inizio l'energia cinetica è zero perché tutti i corpi sono fermi e le masse m_1 e m_2 hanno una data energia potenziale $m_1 h g + m_2 h_2 g$ dove h_2 è l'altezza della massa m_2. Quando m_1 raggiunge il terreno, la massa m_2 si trova ancora alla stessa altezza h_2, dunque la sua energia potenziale non è cambiata. Scrivendo l'uguaglianza fra energia potenziale iniziale e finale si trova:

$$m_1 g h + m_2 g h_2 = m_2 g h_2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (11)$$

dove v_1, v_2 e ω sono le velocità delle masse m_1 e m_2 e la velocità angolare della carrucola.

D'altra parte $v_1 = v_2 = v$ (c'è il filo inestensibile)

e $\omega = \frac{v}{R}$ (la carrucola è trascinata dal filo).

Inoltre $I = \frac{MR^2}{2}$, dunque la (11) diventa

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) v^2 \qquad (12)$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2 m_1 g h}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \qquad (13)$$

c) Sulla massa M_2 il piano orizzontale esercita una forza di attrito F_s diretta in verso opposto alla forza applicata (T_2) dunque F_s è diretta verso l'asse x nel verso negativo. Se m_2 sta fermo, allora anche m_1 sta fermo e anche la carrucola non ruota. Dunque le forze risultanti applicate su m_1 e m_2 e il momento di forze sulla carrucola devono essere nulli. Dunque, valgono le equazioni

$$T_2 - F_s = 0 \qquad (14)$$

$$m_1 g - T_1 = 0 \qquad (15)$$

$$(T_1 - T_2) R = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \qquad (16)$$

La soluzione del sistema (14),(15),(16) è:

$$T_1 = m_1 g \qquad (17)$$

$$T_2 = m_1 g \qquad (18)$$

$$F_s = m_1 g \qquad (19)$$

D'altra parte, la forza di attrito statico non può superare il valore massimo:

$$F_{s\,max} = \mu_s R = \mu_s m_2 g \qquad (20)$$

dunque, il sistema sta fermo solo se $F_s \le F_{s\,max}$, cioè

$$m_1 g \le \mu_s m_2 g \Rightarrow m_1 \le \mu_s m_2 \qquad (21)$$

Il sistema si mette, perciò, in movimento se

$$m_1 \ge m_{1\,min} = \mu_s m_2 \qquad (22)$$

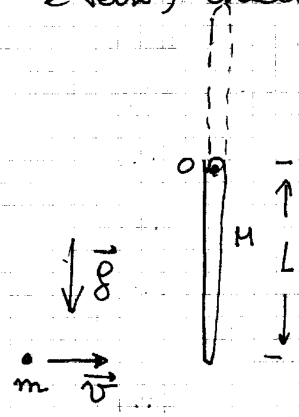
Esercizio 3:

Una barretta omogenea di massa M e lunghezza L è incernierata ad un estremo O ed è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per O. Un corpo di dimensioni trascurabili urta (in un tempo molto breve) la barretta nell'altro estremo libero e rimane conficcato nella barretta. Se la barretta si trova inizialmente nella posizione in figura ~~e il~~ corpo che la urta ha massa m e velocità orizzontale v, si dica:

a) quali fra le seguenti grandezze: quantità di moto, momento della quantità di moto rispetto ad O, energia cinetica si conservano durante l'urto?

b) Quale valore di velocità deve avere il corpo perché la barretta arrivi nella posizione tratteggiata in figura.

c) Quale è l'impulso I della ~~la~~ forza di reazione (modulo, direzione e verso) esercitata dall'asse passante per O sulla barretta durante l'urto?



Soluzione:

a) Le forze esterne agenti sulla barretta sono la forza di gravità $M\vec{g}$ applicata nel centro di massa (al centro della barretta essendo questa omogenea), e la reazione $\vec{R}$ esercitata dal perno. Poiché l'urto dura un tempo molto breve l'effetto della forza di gravità (Impulso della forza) è sicuramente trascurabile. Lo stesso non si può dire a priori per $\vec{R}$ che, essendo una forza di reazione potrebbe assumere valori anche molto grandi). Dunque, in via di principio, l'impulso della forza di reazione $\vec{I} = \int \vec{R}\,dt$ durante l'urto può non essere trascurabile e di conseguenza la quantità di moto può variare ($\Delta \vec{p} = \vec{I}$).

Il momento della forza di reazione $\vec{R}$ rispetto ad O è, invece, sicuramente nullo essendo tale forza applicata in O. Dunque il momento angolare rispetto ad O si deve conservare.

Infine, il corpo di massa m resta attaccato alla barretta, dunque l'urto è anelastico. Ne consegue che anche l'energia cinetica NON si conserva durante l'urto.

In definitiva, l'unica grandezza che si conserva è il momento angolare rispetto ad O (ma non rispetto ad altri punti!)

b) Applicando la conservazione del momento angolare al sistema costituito dalla barretta di massa M + il corpo di massa m negli istanti t_i e t_f immediatamente prima e dopo l'urto si ottiene:

$$m v \ell = m v_f L + I \omega_f \qquad (1)$$

dove v_f = velocità finale del corpo che si muove insieme alla barretta e ω_f = velocità angolare finale della barretta. D'altra parte, poiché il corpo di massa m si trova a distanza L da O e si muove insieme alla barretta, $v_f = \omega_f L$, mentre $I = \frac{M}{3} L^2$ è il momento di inerzia di una barretta omogenea rispetto al polo O posto ad una sua estremità. Dunque, la (1) diviene:

$$m v L = m \omega_f L^2 + \frac{M}{3} L^2 \omega_f = \left(m + \frac{M}{3}\right) L^2 \omega_f \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_f = \frac{m}{m + \frac{M}{3}} \frac{v}{L} \qquad (3)$$

Subito dopo l'urto la barretta + massa m prosegue nel suo moto di rotazione. Le forze agenti su di essa sono $(M+m)\vec{g}$ che è conservativa e la reazione $\vec{R}$ che è applicata nel punto O che è fisso. Dunque l'unica forza che può compiere lavoro è $(M+m)\vec{g}$. Ciò significa che, nel moto successivo all'urto si deve conservare l'energia meccanica totale. Poiché il sistema costituito dalla barretta e dalla massa m compie un moto di rotazione attorno ad O, l'energia cinetica ad esso associata è data dalla sola energia cinetica di rotazione:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} I_m \omega^2 \qquad (4)$$

dove $I = \frac{M}{3} L^2$ = momento di inerzia della barretta rispetto all'asse passante per O ; $I_m = m L^2$ = momento di inerzia della particella rispetto allo stesso asse. Dunque:

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) \omega^2 L^2 \qquad (5)$$

Consideriamo come istante iniziale quello immediatamente successivo all'urto, dunque, la velocità angolare iniziale è quella in eq. (3)

$$\omega_i = \frac{m}{m + \frac{M}{3}} \frac{v}{L} \qquad (6)$$

Ad un generico istante finale, la somma dell'energia potenziale gravitazionale del sistema più quella cinetica deve essere uguale al valore iniziale. Se indichiamo con h_{Mi} e h_{mi} le altezze (rispetto ad un piano orizzontale) del centro di massa di M e della particella m al tempo iniziale e con h_{Mf} e h_{mf} quelle all'istante finale, allora

$$Mg\, h_{Mi} + mg\, h_{mi} + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 \omega_i^2 = Mg\, h_{Mf} + mg\, h_{mf} + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 \omega_f^2 \qquad (7)$$

Il valore minimo di ω_i perché la barretta arrivi nella posizione tratteggiata in figura si ha quando, in quelle condizioni, $\omega_f = 0$. Ma, se la posizione della barretta è quella tratteggiata, valgono le seguenti relazioni geometriche:

$$h_{Mf} = L + h_{Mi}$$ (il centro di massa è al centro della barretta.)

e

$$h_{mf} = 2L + h_{mi}$$

Sostituendo queste espressioni nella (7) insieme a $\omega_i = 0$ si trova

$$\omega_i^2 = \frac{Mg + 2mg}{\frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) L} \qquad (8)$$

Sostituendo, infine ω_i data dalla (6) nella (8) si trova il valore di v richiesto.

$$v = \sqrt{\frac{(M+2m)(m+M/3)\,2gL}{m^2}} \qquad (9)$$

c) Durante l'urto che dura un tempo brevissimo Δt, l'impulso della forza peso è ragionevolmente trascurabile, dunque l'impulso totale agente sul sistema è dovuto solamente alla forza di reazione $\vec{R}$ agente in O.

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}\,dt \qquad (10)$$

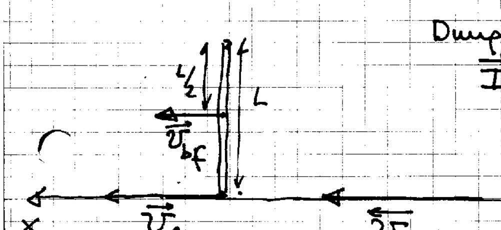
Per la legge generale della meccanica $\vec{I} = \Delta\vec{p}$ dove $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ è la variazione della quantità di moto totale del sistema barretta + massa m. A $t=t_i$,

$$\vec{p}_i = m\vec{v} \qquad (11)$$

alla fine la quantità di moto totale sarà quella della particella di massa m che ruota insieme alla barretta con velocità $v_f = \omega_f L$ dove ω_f è data dalla (3), più quella dovuta al moto della barretta e che è uguale alla massa totale M moltiplicata per la velocità del centro di massa della barretta che è $v_{bf} = \omega_f \frac{L}{2}$. I vettori velocità corrispondenti sono mostrati in figura e sono diretti lungo l'asse x su cui si muoveva inizialmente il corpo di massa m dunque: $\vec{v} = v\,\vec{i}$, $\vec{v}_f = \omega_f L\,\vec{i}$ e $\vec{v}_{bf} = \omega_f \frac{L}{2}\,\vec{i}$

Di conseguenza

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = M\vec{v}_{bf} + m\vec{v}_f - m\vec{v} = \left(M\omega_f\frac{L}{2} + m\omega_f L - mv\right)\vec{i}$$



Dunque,

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \left(M\omega_f\frac{L}{2} + m\omega_f L - mv\right)\vec{i}$$

ciò significa che durante l'urto, il vincolo in O deve esercitare una forza di reazione $\vec{R}$ enorme.

Esercizio proposto:

Si consideri una barretta di massa M e lunghezza L appoggiata su un piano orizzontale liscio. Una particella di massa m che viaggia con velocità $\vec{v}$ come in figura si conficca in un estremo della barretta.

a) quali fra le seguenti grandezze si conservano nell'urto? quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica.

b) Si determini la velocità con cui si muove il centro di massa della barretta dopo l'urto e la velocità angolare con cui la barretta ruota attorno al suo centro di massa (attenzione, dopo l'urto la barretta contiene anche il corpo di massa m).

c) Nei tempi successivi all'urto la velocità angolare e la velocità di traslazione del centro di massa cambiano o restano costanti?