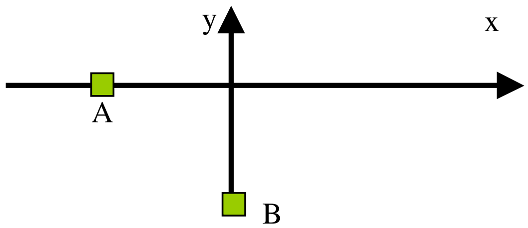
I COMPITINO FISICA GENERALE Ing. Civile-Edile 1/03/2013

Esercizio 1 - Due strade rettilinee ortogonali si incrociano nel punto O. Un'automobile (**1**) si trova inizialmente ferma al tempo $t = 0$ nel punto $A = (-100 \text{ m}, 0)$ e viaggia nel verso positivo delle x con moto uniformemente accelerato di accelerazione $a = 2 \text{ m/s}^2$. Un'altra automobile (**2**) si trova al tempo $t = 0$ ferma nel punto $B = (0, -100 \text{ m})$ e viaggia nel verso positivo dell'asse y con velocità $v = \alpha t^3$. Si dica per quale valore di α le due automobili si incontrano in O.



Esercizio 2 - Un proiettile (**1**) viene sparato al tempo $t = 0$ dall'origine di un sistema di assi xOy con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale con velocità $v_0 = 100$ m/s all'angolo $\theta = 45°$ con l'asse x. Un secondo proiettile (**2**) viene sparato verticalmente verso l'alto allo stesso istante da un punto sull'asse x nel punto $x = 100$ m.

2.1 - Che valore deve avere la velocità v_2 del proiettile 2 se si vuole che i due proiettili si incontrino?

2.2 - Nelle condizioni della domanda 2.1 a che altezza si incontrano i proiettili ?

Esercizio 3 - Un' automobile si muove su una pista circolare orizzontale di raggio $r = 400$ m con velocità costante in modulo e pari a $v_0 = 40$ m/s.

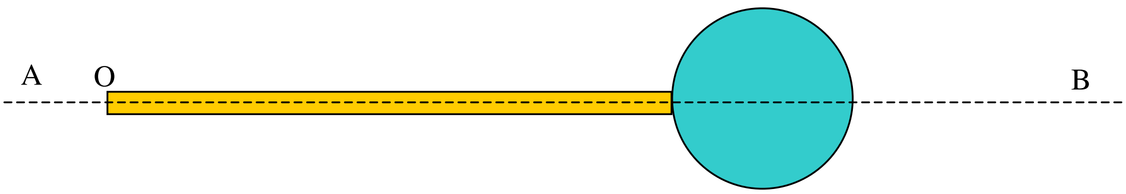
3.1 - Si trovino i valori del coefficiente di attrito automobile-pista che permettono la totale aderenza dell'automobile. Si dica, inoltre, se il coefficiente di attrito coinvolto nella domanda è quello statico o quello dinamico.

3.2 - Si risponda alla domanda precedente nel caso in cui il conducente dell'automobile inizi a frenare senza slittare imprimendo all'auto un'accelerazione tangenziale di modulo $a_t = 5 \text{ m/s}^2$.

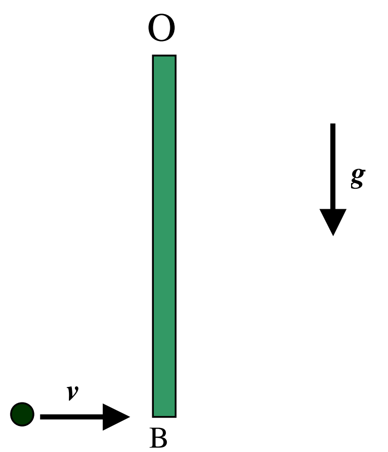
Esercizio 4 - Due corpi (**1** e **2**) hanno masse uguali $m_1 = m_2 = m = 2$ kg e sono posti su un piano orizzontale ruvido. I coefficienti di attrito dinamico dei due corpi con il piano hanno valori diversi e pari, rispettivamente, a $\mu_1 = 0.3$ e $\mu_2 = 0.6$. Sul corpo 1 viene applicata una forza $F = 30$ N diretta lungo l'asse x nel verso positivo. Si trovi direzione, verso e modulo della forza di reazione $\boldsymbol{R}_{12}$ esercitata dal corpo 1 sul 2.

Esercizio 5 – Due corpi (**1** e **2**) hanno masse uguali $m_1 = m_2 = m = 2$ kg e viaggiano su un pavimento orizzontale liscio lungo un asse x orizzontale con le velocità $\boldsymbol{v}_1 = 10$ m/s $\mathbf{i}$ e $\boldsymbol{v}_2 = -5$ m/s $\mathbf{i}$. Ad un dato istante i corpi si urtano restando attaccati. Si calcoli l'energia dissipata nell'urto e si dica se il centro di massa del sistema subisce un'accelerazione durante l'urto e, in caso affermativo, se ne calcoli il valore.

Esercizio 6 – Un'asta cilindrica di massa $m_a = 800$ g, lunghezza $L = 30$ cm e raggio $r_a = 0.5$ cm è collegata ad una sfera di massa $m_s = 300$ g e raggio $r_s = 5$ cm come mostrato in figura.
Calcolare il momento di inerzia I_{AB} del sistema rispetto all'asse AB e il momento di inerzia I_O rispetto ad un asse passante per l'estremo O dell'asta e perpendicolare al piano di figura.



Esercizio 7 – Un'asta di massa $M = 2$ kg e lunghezza $L = 50$ cm è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per un estremo O come mostrato schematicamente in figura. E' presente il campo di gravità $\boldsymbol{g}$. Una particella di massa $m = 30$ g urta l'estremo B della barra con una velocità diretta orizzontalmente e di modulo $v = 50$ m/s conficcandosi nella barra.



7.1 - Si dica, giustificando ogni risposta, quali di queste grandezze si conservano durante l'urto: 1) la quantità di moto della particella, 2) il momento angolare della particella rispetto al polo O, 3) la quantità di moto del sistema particella+asta, 4) il momento angolare del sistema rispetto ad O, 5) l'energia cinetica del sistema.
7.2 - In seguito all'urto l'asta inizia a ruotare attorno ad O. Si trovi la minima velocità angolare raggiunta dall'asta nel moto successivo all'urto e si trovi l'angolo θ formato dall'asta con un asse verticale quando la sua velocità è minima. (θ=0 nella posizione iniziale dell'asta mostrata in figura).

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- L'auto 1 soddisfa la legge oraria è $x(t) = -100 + a\,t^2/2 = -100 + t^2$ (1)
mentre la 2 segue la legge oraria:

$$y(t) = -100 + \int_0^t \alpha t^3 dt = -100 + \alpha \frac{t^4}{4} \qquad (2)$$

l'auto 1 raggiunge il punto O quando $x(t) = -1.00 + t^2 = 0$, cioè $t = t_1 = \sqrt{100}$ s = 10 s (3)

La 2 arriva in O quando $y(t) = 0$, cioè $t_2 = \left(\frac{400}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ (4)

Imponendo l'uguaglianza dei tempi t_1 e t_2 si trova: $\alpha = 0.04$ m/s^2 (5)

Soluzione Es.2 - **2.1** -Le leggi orarie dei due proiettili sono

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{v_0}{\sqrt{2}} t \\ y_1(t) &= \frac{v_0}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 100 \text{ m} \\ y_2(t) &= v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

I proiettili si incontrano se $x_1(t) = x_2(t)$ e $y_1(t) = y_2(t)$. Imponendo $x_1(t) = x_2(t)$, si trova

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}} t = 100 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{100\sqrt{2}}{v_0} = 1.41 \text{ s} \qquad (3)$$

Imponendo $y_1(t) = y_2(t)$ si trova $v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 70.7$ m/s (4)

2.2 - L'altezza a cui avviene l'incontro è quella raggiunta dai proiettili all'istante t di eq. (3) cioè:

$$y_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} g t^2 = 90.2 \text{ m} \qquad (5)$$

Soluzione Es. 3 - 3.1 - Il moto è circolare ed uniforme e, quindi, l'accelerazione dell'auto è solo centripeta e pari in modulo a

$$a_c = \frac{v^2}{r} = 4 \text{ m/s}^2 \qquad (1)$$

Dunque, se si vuole che l'automobile non slitti, il terreno deve esercitare sull'automobile una forza di attrito diretta verso il centro e di modulo: $F_a = m\,a_c$ (2)
Ma la forza di attrito statico non può superare, in modulo, la massima forza di attrito statico

$$F_{max} = m\,R = \mu\,m\,g \qquad (3)$$

Dunque,

$$m a_c < \mu m g \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq \frac{a_c}{g} = 0.408 \qquad (4)$$

Si tratta di <u>attrito statico</u> perchè l'automobile è ferma lungo la direzione radiale in cui è applicata la forza.

3.2 - In questo caso, oltre all'accelerazione centripeta, cè anche una accelerazione tangenziale a_t perpendicolare alla prima. Essendo le due accelerazioni ortogonali, il vettore accelerazione totale è, dunque, un vettore che ha modulo pari a

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{41} = 6.40 \text{ m/s}^2 \qquad (5)$$

Ripetendo i ragionamenti precedenti con a al posto di a_c si trova ora: $\mu \geq \frac{a}{g} = 0.653$ (6)

Soluzione Es.4 - Poichè i corpi non si spostano lungo l'asse verticale, le reazioni $\boldsymbol{R}_1$ e $\boldsymbol{R}_2$ esercitate dal piano di appoggio sui due corpi sono uguali ed opposte alla forza peso, dunque, il loro modulo è $R_1 = R_2 = mg$. Le forze che agiscono sul corpo 2 lungo l'asse x sono la reazione $\boldsymbol{R}_{12}$ esercitata dal corpo 1 sul 2 che è diretta nel verso positivo dell'asse e la forza di attrito dinamico diretta nel verso negativo . L'equazione del moto del corpo 2 lungo l'asse x è, perciò:

$$R_{12} - \mu_2 R_2 = ma \quad \Rightarrow \quad R_{12} = m\,(a + \mu_2\, g) \tag{1}$$

L'accelerazione dei due corpi è la stessa, dunque, essi si comportano come un'unico corpo a cui è applicata una forza totale lungo x data dalla somma della forza applicata F e delle forze di attrito esercitate dal piano. Per la I equazione cardinale della meccanica:

$$F - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 = 2\, m\, a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{2m} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} g = 3.09 \text{ m/s}^2 \tag{2}$$

Sostituendo il valore di a nella (1) si ottiene: $R_{12} = m\,(a + \mu_2\, g) = 17.9$ N (3)

Soluzione Es.5 – Non essendo presenti forze impulsive esterne che agiscono sul sistema dei due corpi durante l'urto, si conserva la quantità di moto totale. Inoltre, poichè i corpi restano attaccati (urto totalmente anelastico), le velocità finali dei due corpi sono uguali e pari a $\boldsymbol{v}_f$. Imponendo la conservazione della quantità di moto si trova:

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}{2} = 2.5\, \boldsymbol{i} \text{ m/s} \tag{1}$$

L'energia dissipata è, quindi:

$$U = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 - m v_f^2 = 112.5 \text{ J} \tag{2}$$

Poichè non ci sono forze esterne al sistema di due corpi agenti lungo l'asse x, la quantità di moto del sistema si conserva sempre ad ogni istante. Ma, poichè la velocità del centro di massa è pari alla quantità di moto divisa per la massa totale, si deduce che il centro di massa si muove sempre con velocità costante e, dunque, non accelera mai.

Soluzione Es.6. – Il momento di inerzia del sistema è la somma dei momenti di inerzia del cilindro e della sfera. Si danno i due casi:

asse AB : Il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse AB passante per il suo centro di massa è

$$I_{AB}^s = \frac{2}{5} m_s r_s^2 = 3\ 10^{-4} \text{ Kg m}^2 \tag{1}$$

mentre quello del cilindro rispetto al suo asse AB è $I_{AB}^c = \frac{1}{2} m_a r_a^2 = 1.00\ 10^{-5}$ Kg m^2. (2)

Dunque, il momento di inerzia totale è: $I_{AB} = I_{AB}^c + I_{AB}^a = 3.10\ 10^{-4}$ Kg m^2 (3)

asse passante per O : Il momento dell'asta è $I_O^a = \frac{1}{3} m_a L^2 = 2.4\ 10^{-2}$ Kg m^2 (4)

mentre quello della sfera si ottiene applicando il teorema degli assi paralleli:

$$I_O^s = \frac{2}{5} m_s r_s^2 + m_s (L + r_s)^2 = 3.70\ 10^{-2} \text{ kg m}^2 \tag{5}$$

Dunque, il momento risultante è: $I_O = I_O^a + I_O^s = 6.10\ 10^{-2}$ Kg m^2 (6)

Soluzione Es.7 – 7.1-

1) no perchè durante l'urto la particella è sottoposta a forze impulsive, **2)** no perchè la particella è sottoposta a momenti di forza impulsivi rispetto ad O, **3)** no perchè c'è una forza impulsiva esterna esercitata dal vincolo in O, **4)** sì perchè la forza esterna impulsiva ha braccio nullo rispetto ad O,

5) no perchè l'urto è anelastico.

7.2 - Durante l'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto ad *O*. Dunque:

$$mvL = I\,\omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{mvL}{I} \tag{1}$$

dove ω_0 è la velocità angolare subito dopo l'urto e I è il momento totale di inerzia dell'asta e della particella rispetto all'asse passante per *O* e perpendicolare al piano della figura

$$I = \frac{ML^2}{3} + mL^2 = 0.174 \text{ Kg m}^2 \tag{2}$$

Sostituendo il valore di I nella (1) si trova: $\omega_0 = 4.31$ rad/s (3)

Nel tempo successivo all'urto, non essendo presenti attriti, si conserva l'energia meccanica. Inizialmente (subito dopo l'urto) l'energia è solo cinetica (assumiamo che l'energia gravitazionale nella posizione iniziale sia nulla) e pari a $E_i = I\,\omega_0^2/2 = 1.62$ J (4)

Assumendo che l'asta compia un'intera rotazione attorno al punto *O*, la minima velocità angolare verrà raggiunta nella posizione di massima energia potenziale, cioè quando l'asta ha compiuto una rotazione di 180°. In tale posizione il centro di massa dell'asta, che si trova al centro dell'asta, si è sollevato di L mentre la massa m si è sollevata di 2 L. Dunque, l'energia meccanica finale è:

$$E_f = MgL + 2mgL + \frac{1}{2} I\omega_f^2 \tag{5}$$

dove ω_f è la velocità angolare raggiunta in tale posizione. Uguagliando le energie iniziale (eq.(4)) e finale (eq.(5)), si trova:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{I}(M + 2m)g} \tag{6}$$

Il termine sotto radice è negativo e pari a - 97.5 rad^2/s^2 < 0. Dunque, la (6) non ammette soluzioni reali. Ciò significa che l'ipotesi che la barra compia un'intera rotazione non è verificata. Ne consegue che l'asta si fermerà ad un certo angolo dove la sua velocità angolare sarà nulla. Dunque, la minima velocità angolare è nulla. La posizione angolare in corrispondenza della quale la velocità angolare è minima ($\omega_f = 0$) si trova imponendo luguaglianza fra l'energia meccanica iniziale e quella finale che è solo potenziale ed è pari a

$$E_f = MgL(1-\cos\theta)/2 + mgL(1-\cos\theta) = (M/2 + m)\,gL(1-\cos\theta) \tag{7}$$

dove θ è l'angolo di cui è ruotata la barra. Uguagliando le due energie E_i in eq.(4) ed E_f in eq.(7) si trova:

$$\cos\theta = 1 - \frac{E_i}{\left(\frac{M}{2} + m\right)gL} = 0.68 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos(0.68) = 47.2° \tag{8}$$