II Compitino di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE 2014

Esercizio 1

Un gas perfetto monoatomico occupa il volume $V_0 = 1$ litro alla pressione $p_0 = 10^5$ Pa. Il gas compie la trasformazione $p = a/V^3$ dove a è una costante. Il gas viene fatto espandere fino al volume finale V_f compiendo il lavoro $L = 30$ J.

1.1- Si calcoli il valore della costante a (con le corrette dimensioni) e il volume finale V_f raggiunto dal gas.

1.2 – Si dica se la trasformazione è una trasformazione reversibile adiabatica, isoterma, isocora o isobara giustificando opportunamente la risposta. Si calcoli il valore del calore Q assorbito dal gas dicendo se il calore è realmente assorbito o se è ceduto.

Esercizio 2

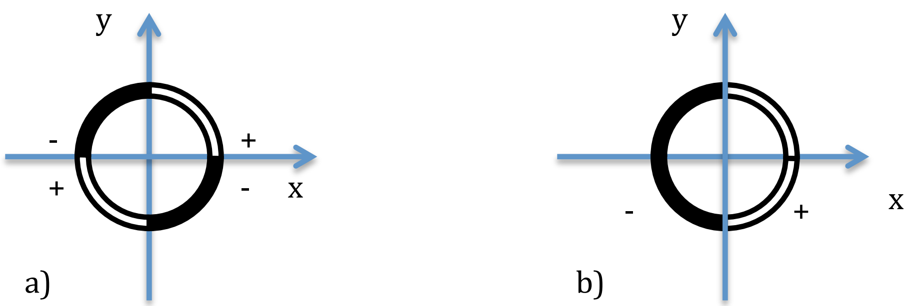
Un litro di acqua è contenuto in un recipiente adiabatico a una temperatura iniziale T_i incognita. Nell'acqua viene gettato un chilogrammo di ghiaccio che si trova inizialmente alla temperatura di 0 °C, e il recipiente viene chiuso ermeticamente (calore latente di fusione del ghiaccio $L_f = 3.33\ 10^5$ J/Kg). A equilibrio raggiunto si osserva che una massa di ghiaccio pari a $M_g = 200$ g si è completamente sciolta. Si calcoli la temperatura iniziale T_i dell'acqua.

Esercizio 3

Un sommergibile occupa un volume $V_s = 80$ m^3 e ha massa totale (compresi i passeggeri + materiale a bordo) pari a $M_s = 7\ 10^4$ kg. Il sommergibile si trova nell'acqua di un lago. Si dica, giustificando opportunamente la risposta, se il sommergibile galleggia o se è totalmente immerso nell'acqua del lago. Si vuole che il sommergibile si immerga interamente nell'acqua del lago senza, però, andare a fondo. Si dica quanti metri cubi di acqua devono essere imbarcati sul sommergibile o quanta massa di materiale deve essere rimossa dal sommergibile.

Esercizio 4
Un anello circolare di materiale isolante di raggio a = 10 cm e sezione trascurabile, viene tagliato in quattro archi uguali; su ciascuno degli archi viene poi depositata una carica elettrica di modulo $|Q|$ = 1 nC distribuita uniformemente, in modo tale che la somma delle cariche dei quattro archi sia nulla. Gli archi vengono poi riposizionati in modo da formare una circonferenza.

4.1 Calcolare il campo elettrico **E** (modulo, direzione e verso) al centro della circonferenza nelle due configurazioni possibili a) e b) illustrate in figura (gli archi bianchi in figura corrispondono alla carica di segno positivo)



4.2 Determinare il lavoro necessario per portare una carica q = 2nC da distanza infinita al centro della circonferenza, nei due casi precedenti. Giustificare la risposta.

Esercizio 5
Su due gusci cilindrici coassiali di raggio a = 2cm e b = 4cm e di lunghezza L = 100cm viene deposta in modo uniforme della carica elettrica, in modo che la carica totale sul cilindro interno sia positiva e valga Q_a = 100 nC, mentre quella sul cilindro esterno è negativa e vale $Q_b = -Q_a$.

5.1 Considerando i cilindri di lunghezza infinita, si calcoli il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nei punti dello spazio che si trovano alle distanze r_1=1cm e r_2=3cm dall'asse.

5.2 I due cilindri vengono messi in rotazione attorno al proprio asse con lo stesso periodo di rotazione $T = 0.1\ s$. Calcolare il campo magnetico (modulo, direzione e verso) all'interno del primo cilindro ($r<a$) e nella regione compresa tra i due cilindri ($a<r<b$).

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1

1.1- La legge $p = a/V^3$ deve essere soddisfatta ad ogni istante e, quindi, anche all'inizio quando $V = V_0$ e $p = p_o$. Dunque $p_0 = a/V_0^3$ cioè

$$a = p_0\, V_o^3 = 10^{-4} \text{ Pa m}^9 \qquad (1)$$

Il lavoro fatto dal gas è

$$L = \int P\, dV = \int \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{2}\left(\frac{1}{V_f^2} - \frac{1}{V_0^2}\right) \qquad (2)$$

dove gli estremi inferiore e superiore di integrazione sono, rispettivamente, V_0 e V_f. Dalla (2) si deduce

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{V_0^2} - \frac{2L}{a}}} \approx 1.6 \times 10^{-3} m^3 = 1.6\, l \qquad (3)$$

1.2- La dipendenza $p = a/V^3$ non corrisponde né alla legge adiabatica reversibile per un gas monoatomico ($pV^{5/3}$ = cost) , né alla isoterma reversibile (pV = cost), né alla isocora reversibile(V= cost) né alla isobara reversibile (p = cost). Dunque si tratta di una trasformazione reversibile di tipo diverso.
Per il *I* principio della termodinamica

$$Q = L + \Delta U = L + 3\,(p_f V_f - p_0 V_0)/2 = L + 3\,a\,(1/V_f^2 - 1/V_0^2)/2 = -2L = -60 \text{ J} \qquad (1)$$

dove nel penultimo passaggio si è usata la relazione (2) del punto precedente.
Il segno – indica che il calore viene ceduto dal gas.

Soluzione Esercizio 2.

Poiché all'equilibrio una parte di ghiaccio (0.8 kg) non si è sciolta, si può concludere che la temperatura finale è la temperatura di coesistenza acqua-ghiaccio, cioè 0 °C. D'altra parte, il ghiaccio si trova inizialmente a temperatura 0 °C e, quindi, può solamente assorbire calore sciogliendosi. Poiché il sistema è chiuso in un contenitore adiabatico, il calore totale assorbito da ghiaccio ed acqua deve essere nullo. Dunque:

$$Q_g + Q_a = M_g\, L_f + c_a\, M_a\, (0 - T_i) = 0 \qquad (1)$$

dove M_a = 1kg = massa di acqua, $c_a = 10^3$ cal/kg K = 4.186 10^3 J/kg K è il calore specifico dell'acqua e L_f= 3.33 10^5 J/kg è il calore latente di fusione del ghiaccio. Dalla (1) si deduce:

$$T_i = M_g\, L_f / (c_a\, M_a) = 15.9°\text{C} \qquad (2)$$

Soluzione Esercizio 3:
La densità dell'acqua è $\rho = 1000$ kg/m^3 mentre la densità media del sommergibile è $\rho_s = M_s/V_s = 875$ kg/m^3. Ne consegue che il sommergibile è più leggero dell'acqua e, quindi galleggia.

Perché il sommergibile si immerga interamente bisognerà imbarcare una massa di acqua tale da far sì che il peso totale del sommergibile + quello dell'acqua imbarcata sia uguale al peso di acqua spostata dal volume V_s del sommergibile, in modo che la forza peso e la forza di Archimede si equilibrino esattamente. Dunque, deve essere soddisfatta la legge di equilibrio:

$(\rho V + M_s)\, g - \rho\, V_s g = 0$, cioè $\quad V = V_s - M_s/\rho = 10$ m^3.
(1)

dove $\rho = 1000$ kg/m^3 è la densità dell'acqua.

Soluzione Es. 4.1

Nel caso a) è facile vedere che per simmetria il campo elettrico al centro del cerchio sarà nullo (considerando per esempio che il campo deve essere simmetrico rispetto al piano $z = 0$ e rispetto ai due piani perpendicolari $x = y$ e $x = -y$).

Nel caso b) invece siamo in presenza di due semicirconferenze con cariche di segno opposto. I piani di simmetria sono $z = 0$ e $y = 0$. Il campo nell'origine può avere componente solo lungo x.

Anche senza le considerazioni di simmetria, il campo si ottiene semplicemente come somma vettoriale, con i segni opportuni, del campo generato da una distribuzione lineare di carica con densità uniforme $\lambda = (2Q/\pi a)$ disposta ad arco di circonferenza, calcolato nel centro della circonferenza stessa. Per il quarto di circonferenza nel I quadrante, che ha carica positiva, sommando i contributi di ciascun elementino di arco, con carica $dq = \lambda dl = \lambda a d\varphi$, si ha

$$E_x = -\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda a\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a^2} \cos\varphi = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\pi a^2}$$

$$E_y = -\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda a\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a^2} \sin\varphi = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\pi a^2}$$

Nel primo caso entrambe le componenti cambiano segno considerando il contributo dell'altro quarto di anello con la stessa carica: la somma totale è quindi nulla.

Nel caso b), in cui le cariche positive sono nel I e IV quadrante, sopravvive solo la componente *x* del campo, che diventa il quadruplo di quella dovuta a ciascun arco.

$$E_x = -\frac{8Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\pi a^2} \approx -2.3\times10^3\ N/C$$

Soluzione Es. 4.2

Il lavoro richiesto è nullo in entrambi i casi. Infatti per definizione tale lavoro è uguale alla carica q moltiplicata per la differenza di potenziale tra il centro della circonferenza e i punti a distanza infinita. Basta quindi determinare il valore del potenziale V al centro del cerchio come somma di contributi $dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

In entrambi i casi tutti gli elementini di carica in cui è suddiviso l'anello sono alla stessa distanza *r = a* dal punto in cui si calcola il potenziale, che diventa quindi

$$V = \frac{\int dQ}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0$$

perché la carica totale è nulla.

Soluzione 5.1

Il primo cilindro ha una densità superficiale di carica

$$\sigma_a = \frac{Q}{2\pi La} \approx 8.0\times10^{-7}\ C/m^2$$

mentre il secondo

$$\sigma_b = \frac{-Q}{2\pi Lb} \approx -4.0\times10^{-7} C/m^2$$

Il problema è a simmetria cilindrica ed è invariante per traslazione lungo l'asse z: sappiamo dal caso del campo di un filo indefinito che questo implica che il campo elettrico dipende solo dalla distanza dall'asse e ha direzione radiale.
Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica, coassiale ai cilindri dati, di raggio *r* e altezza *h* si ha

$$2\pi rhE_r = Q_{int}/\varepsilon_0$$

Per $r<a$ la carica interna è nulla, dunque banalmente $E_r = 0$, anche in r=1cm

Per $a<r<b$ la carica interna è dovuta solo al cilindro interno: $Q_{int} = \sigma_a 2\pi a\, h$
da cui

$$rE_r = \sigma_a a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}$$

ossia

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

se r = 3 cm si ottiene $E_r = 6.0\times10^4$ V/m

Soluzione 5.2

Ciascuno dei due cilindri carichi in rotazione è assimilabile a un solenoide infinito, e genera un campo magnetico uniforme al suo interno, diretto come l'asse del cilindro. Il campo totale in tutto lo spazio sarà dunque semplicemente la somma vettoriale dei campi dovuti a ciascun cilindro.

Per calcolare il campo magnetico prodotto da un cilindro con carica elettrica superficiale σ, basta usare la legge di Ampère come si fa normalmente per il solenoide, scrivendo la circuitazione del campo **B** lungo un percorso rettangolare giacente su un piano di simmetria del cilindro, con una base l all'interno del cilindro e l'altra all'esterno. Supponendo trascurabile (come per il solenoide infinito) il campo esterno, si ha allora come sappiamo, che solo la base interna al cilindro contribuisce alla circuitazione, e per la legge di Ampère,

$$B_z\, l = \mu_0 I_{conc}$$

dove occorre calcolare la corrente concatenata al circuito considerato. Per far questo osserviamo che il rettangolo di base l individuato dal circuito considerato in un periodo di rotazione T viene attraversato da una carica $\Delta Q = Q\frac{l}{L}$, pari alla carica della "fetta" di cilindro di altezza l. Dunque $I_{conc} = \Delta Q/T = \frac{lQ}{LT}$ Si ha quindi

$$B_z = \mu_0 \frac{Q}{LT}$$

dove se Q > 0, B_z è positivo se il cilindro ruota in senso antiorario nel piano xy, secondo la regola della mano destra.

Notiamo che B_z non dipende dal raggio del cilindro, ma solo dalla carica totale e dal periodo di rotazione.

Dunque il contributo di ciascuno dei due cilindri vale

$$B_a = \mu_0 \frac{Q}{LT} \qquad r < a$$
$$B_a = 0 \qquad r > a$$

$$B_b = -\mu_0 \frac{Q}{LT} \qquad r < b$$
$$B_b = 0 \qquad r > b$$

Il campo magnetico totale vale dunque

$$B_z = 0 \qquad r < a$$
$$B_z = -\mu_0 \frac{Q}{LT} \approx -1.3\times10^{-12}\ \mathrm{T} \qquad a < r < b$$