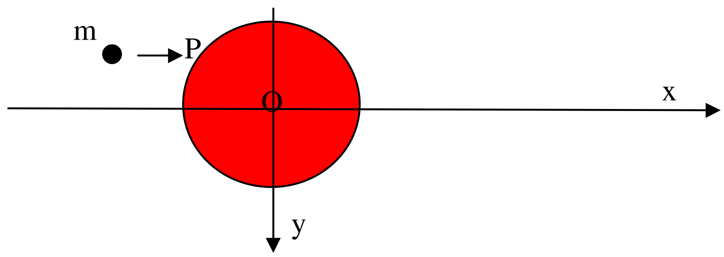
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 19 Febbraio 2016
Civile-Ambientale-Edile: Fisica Generale I 011BB[testi 1,2,3,4] durata 3 ore
Edili : Fisica Generale (BB053 e 053 BB) [testi 1,2,3,4] durata 3 ore
Civili : Fisica Generale I 011BB [testi 1,2,3] durata 2 ore e 15 minuti
Civili : Fisica Generale BB054 [testi 1,2,4] durata 2 ore e 15 minuti

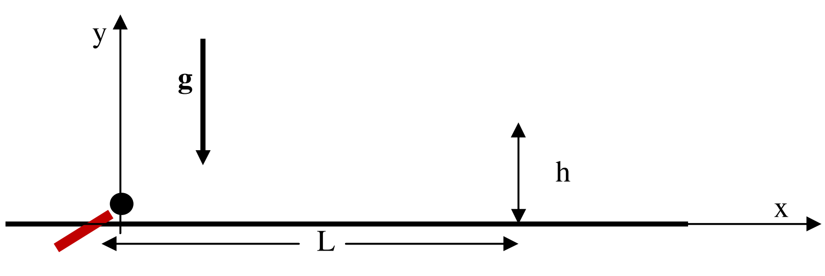
Esercizio 1 – Un proiettile di massa m = 100 g viaggia con velocità v = 100 m/s parallelamente all'asse x a distanza h = 10 cm dall'asse. Il proiettile si conficca in un disco di massa M = 1 Kg e raggio $r = 2\ h$ = 20 cm che giace nel piano orizzontale xy ed è libero di ruotare senza attrito attorno all'asse verticale z uscente dal piano di figura.



1.1 – Si dica, dando opportune giustificazioni, se nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema di due corpi e si trovi la velocità angolare del disco dopo l'urto.

1.2 – Si calcolino le componenti x ed y dell' impulso della forza esercitata dall'asse sul disco durante l'intero urto.

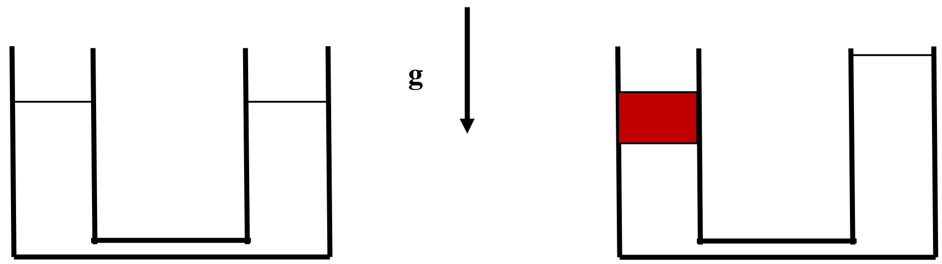
Esercizio 2- Un proiettile di massa m = 100 g viene sparato da terra all'istante t = 0 s ad un angolo θ = 45 ° con l'orizzontale. Si vuole colpire un bersaglio posto a distanza L = 1000 m e altezza h = L/2 = 500 m.



2.1 – Si trovi il valore della velocità con cui il proiettile deve essere sparato.

2.2- Si dica a quale istante t il proiettile incontra il bersaglio.

Esercizio 3 – Un sistema è costituito da due lunghi cilindri identici di sezione $S = 10^{-2}$ m^2 collegati da un sottile tubicino nei quali si trova una certa quantità di acqua come mostrato in figura *a*. Il sistema è immerso in una atmosfera a pressione $p_0 = 10^{5}$ Pa e gli assi dei cilindri sono verticali.



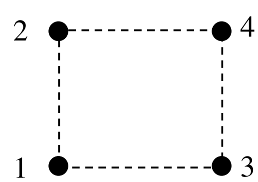
a) **b)**

Ad un dato istante, un pistone di massa M = 10 Kg e sezione S viene appoggiato sulla superficie dell'acqua nel cilindro a sinistra (vedi figura *b*) e, conseguentemente, il livello del liquido nella parte a destra si solleva di una quantità Δh. Attenzione! con Δh si indica di quanto si solleva l'acqua nel recipiente a destra e non la differenza delle altezze dell'acqua nei due recipienti.

3.1 – Considerando trascurabile ogni attrito, si trovi il valore di Δh ad equilibrio raggiunto.

3.2 – Si trovi la variazione Δp di pressione sul fondo dei cilindri fra l'istante iniziale in assenza di pistone e quello finale di equilibrio in presenza del pistone.

Esercizio 4. Quattro cariche puntiformi positive (1, 2, 3, 4) con carica elettrica q = 1 μC e massa m = 1 g si trovano sui vertici di un quadrato di lato L = 1 m come mostrato in figura.



4.1 – Si calcoli il modulo della forza agente su ciascuna carica.

Ad un dato istante le cariche vengono lasciate libere di muoversi in assenza di qualunque forza esterna (gravità, attriti…).

4.2 - Si calcoli la velocità massima raggiunta dalle cariche.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- **1.1**- La quantità di moto del sistema disco+proiettile non si conserva perché l'asse è in grado di esercitare forze impulsive. Poiché la componente z dei momenti di forza esterni agenti sul sistema disco+proiettile rispetto al polo O è nulla (la forza impulsiva è applicata in O) , si conserva la componente z del momento angolare. Inizialmente $L_i = mvh$ (1)

Alla fine $L_f = (m + M/2)\, r^2\, \omega$ (2)

Imponendo la condizione $L_i = L_f$ si trova: $\omega = \dfrac{mvh}{(m+M/2)r^2} = \dfrac{mv}{4(m+M/2)h} =$ 41.7 rad/s (3)

1.2 - L'impulso esercitato dall'asse è uguale alla variazione di quantità di moto del sistema costituito dal disco e dal proiettile. Poiché il centro di massa del disco resta fermo, la quantità di moto è interamente dovuta al solo proiettile. Inizialmente

$\boldsymbol{p}_i = (mv, 0, 0) =$ (10 Kg m/s, 0 Kg m/s , 0 Kg m/s) (4)

dopo l'urto il proiettile si muove di moto circolare attorno all'asse z con velocità angolare ω di eq.(3). Poiché il corpo si trova nel punto P in figura il modulo della sua velocità è ωr e il vettore velocità fa un angolo $\theta = 60°$ con l'asse x (basta osservare che il segmento OP fa un angolo β con l'asse x che soddisfa la relazione $\sin\beta = h/r = ½$ e, quindi, $\beta = 30°$. Dalla figura si deduce, quindi, $\theta = 90° - \beta = 60°$). Dunque

$\boldsymbol{p}_f = (m\,\omega r \cos 60°, -m\,\omega r \sin 60°, 0) =$ (0.417 Kg m/s, -0.722 Kg m/s , 0 Kg m/s) (5)

Dunque, l'impulso della forza è: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i =$ (- 9.58 kg m/s, - 0.72 Kg m/s) (6)

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- Le equazioni del moto del proiettile sono:

$x(t) = v \cos\theta\, t$ (1)

$y(t) = v \sin\theta\, t - g\, t^2/2$ (2)

con $v > 0$ e $\theta = 45°$.Al momento t dell'impatto, $x(t) = L$ e $y(t) = h = L/2$. Dunque

$$t = \frac{L}{v\cos\theta} \quad (3)$$

e
$$L\tan\theta - g\frac{L^2}{2v^2\cos^2\theta} = \frac{L}{2} \quad (4)$$

dalla (4) si deduce $v = \dfrac{\sqrt{gL}}{\sqrt{2\tan\theta - 1}\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{gL}}{\cos\theta}$ = 140 m/s (5)

2.2 – L'istante di tempo a cui avviene l'impatto si trova sostituendo la velocità v in eq.(5) nella (3).

Si trova $t = L/(v\cos\theta) = \sqrt{\dfrac{L}{g}}$ = 10.1 s (6)

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – la pressione sulla superficie di acqua a contatto con la piastra è

$p = p_0 + Mg/S =$ 109800 Pa (1)

All'equilibrio il livello dell'acqua nel contenitore a sinistra si è abbassato di Δh mentre quello a destra si è sollevato della stessa quantità per la conservazione della massa. Dunque il livello dell'acqua nel recipiente a destra è più alto di quello a sinistra di $2\,\Delta h$. Dunque, la pressione nel contenitore a destra nel punto che si trova alla stessa altezza del livello dell'acqua a sinistra si ottiene dal principio di Pascal ed è pari a:

$p = p_0 + \rho\, g\, 2\,\Delta h$ (2)

dove ρ è la densità dell'acqua ($\rho = 1000$ kg/ m^3). Uguagliando le pressioni (1) e (2) si trova:

$$\Delta h = \frac{M}{2\rho S} = 0.5 \text{ m} \quad (3)$$

3.2 Inizialmente la pressione sul fondo dei due recipienti ha il valore:

$p_i = p_0 + \rho\, g\, h$ (4)

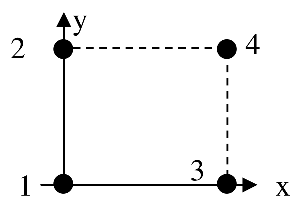
dove h è il valore iniziale dell'altezza dell'acqua nei due recipienti all'inizio. Alla fine

$$p_f = p_0 + \rho\, g\, (h + \Delta h) \tag{5}$$

la variazione di pressione è, perciò: $\Delta p = p_f - p_i = \rho\, g\, \Delta h = Mg/\,(2S) = 4900$ Pa (6)
L'espressione in eq.(6) ha una semplice interpretazione: il peso Mg del piston si ripartisce in parti uguali sulle superfici di base dei cilindri.

Soluzione Esercizio 4 - 4.1 – Per simmetria, i moduli delle forze agenti su tutte le cariche sono uguali, quindi, è sufficiente calcolare il modulo della forza agente su una generica carica come la 4 in figura. La forza è $\boldsymbol{F}_4 = q\,\boldsymbol{E} = q\,(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3)$ (1)
dove $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ sono i campi generati dalle cariche 1, 2 e 3 nel punto dove si trova la carica 4

$$\vec{E}_1 = \left[\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L^2}, \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L^2}\right] \;;\vec{E}_2 = \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}, 0\right] \;;\vec{E}_3 = \left[0, \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\right] \;; \tag{2}$$



Dunque, il campo risultante agente sulla carica 4 è

$$\vec{E} = \left[\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}, \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\right] = (\,12.2\ 10^3\ \text{V/m}\ ,\ 12.2\ 10^3\ \text{V/m}) \tag{3}$$

Il modulo della forza è, quindi: $F_4 = 17.2\ 10^{-3}$ N (4)

4.2- Nel processo si conserva l'energia meccanica, dunque la velocità delle cariche è massima quando si trovano a distanza infinita dove l'energia potenziale è nulla. Inoltre, data la simmetria, le velocità delle cariche hanno lo stesso valore v. Ne consegue che l'energia finale è:

$$E_f = 2\, m\, v^2 \tag{5}$$

All'inizio l'energia è solo potenziale ed uguale all'energia di configurazione

$$E_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} qV_j = 2qV \tag{6}$$

dove V_j è il potenziale generato sulla carica j-esima dalle altre cariche che, per simmetria, ha lo stesso valore V per tutte le cariche. Il potenziale è pari a:

$$V = V_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{4} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L} = 24.3\ 10^3\ \text{V} \tag{7}$$

Dunque, l'energia iniziale è:

$$E_i = 2qV = 4\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}L} = 48.6\ 10^{-3}\ \text{J} \tag{8}$$

Imponendo l'eguaglianza $E_i = E_f$ si trova

$$v = \sqrt{\frac{qV}{m}} = 4.92\ \text{m/s} \tag{9}$$