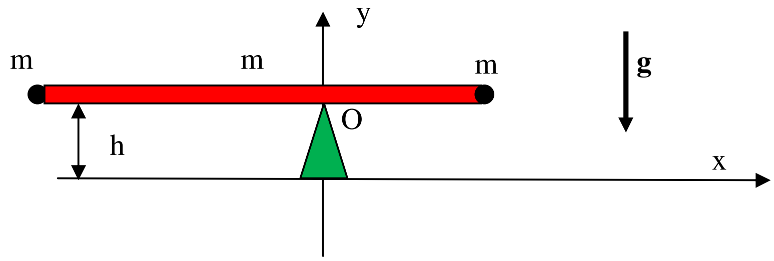
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 9 Giugno 2016

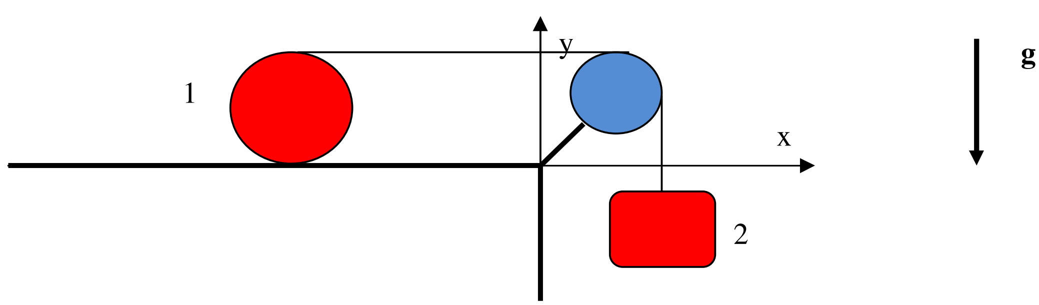
Esercizio 1 – Una barra di massa m = 1 Kg e lunghezza L = 1 m è appoggiata su un cuneo come mostrato in figura. Due piccoli corpi, ciascuno di massa uguale ad m sono incollati all'estremo della sbarra. La sbarra si trova inizialmente ferma nella posizione orizzontale mostrata in figura con l'estremo a sinistra a distanza $d = 2L/3$ dal punto O di contatto fra sbarra e cuneo e ad altezza h = 0.1 m dal suolo. Al tempo $t = 0$ la sbarra viene lasciata libera. Si supponga che il punto di contatto resti sempre fermo durante l'intero moto successivo,



1.1 – Si trovi l'accelerazione angolare α della sbarra all'istante $t = 0$ e si dica se il vettore accelerazione angolare è entrante o uscente dal piano di figura. .

1.2 – Si trovi la velocità angolare con cui la barra urta il piano orizzontale.

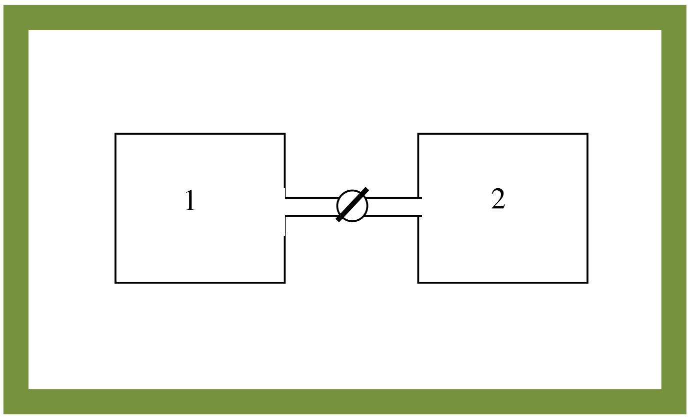
Esercizio 2- Un cilindro (1) di massa m = 1 Kg e raggio r = 10 cm è appoggiato su un piano ruvido ed è collegato ad un corpo (2) di massa identica pari a m attraverso ad una fune inestensibile di massa trascurabile appoggiata su una carrucola di massa trascurabile che può ruotare liberamente senza attrito. Il cilindro è inizialmente fermo e viene lasciato libero al tempo $t = 0$. Si supponga che la fune sia avvolta sul cilindro e che <u>non scivoli sul cilindro</u> e che il cilindro compia un moto di rotolamento puro.



2.1 – Si trovi la relazione fra l'accelerazione a_1 del centro di massa del cilindro e l'accelerazione a_2 del corpo (2) e si trovi il valore di a_1 durante il moto di rotolamento.

2.2- Si trovino le componenti x ed y della forza di reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dalla carrucola sulla fune e si dica quale è il minimo valore μ del coefficiente di attrito statico fra cilindro e piano orizzontale che permette il rotolamento puro.

Esercizio 3 – Due recipienti , 1 e 2, che hanno lo stesso volume $V = 10^{-3}$ m^3 contengono un gas perfetto monoatomico alla stessa temperatura T_0 = - 100 °C. I due contenitori sono collegati da un sottile tubicino nel quale è presente un rubinetto S inizialmente chiuso. I contenitori si trovano all'interno di una scatola con pareti completamente adiabatiche. Le pressioni del gas nei due recipienti sono, rispettivamente, $p_1 = 10^5$ Pa e $p_2 = 2\ p_1$. Ad un dato istante il rubinetto T viene aperto e i gas presenti nei due recipienti si mescolano.



3.1 - Si calcolino le pressioni e le temperature finali dei gas nei recipienti.

Ad un dato istante, il contenitore adiabatico viene tolto e i due recipienti vengono lasciati in contatto con un'atmosfera esterna a temperatura costante pari a T_a = 20 °C.

3.2 - Si dica se la trasformazione è reversibile o irreversibile e si calcoli il calore totale assorbito dai gas e il lavoro fatto dai gas nel tempo necessario al raggiungimento del nuovo equilibrio.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- **1.1**- Il centro di massa del sistema costituito dalla barra e dalle due masse si trova al centro della barra a sinistra del punto O di contatto fra cuneo e barra e a distanza $d = L/6 = 0.167\ m$ da O.
Il momento di forza rispetto al vertice O del cuneo è dovuto alla forza peso totale applicata nel centro di massa e, quindi, è pari a $\tau = 3mgd = mgL/2 = 4.9$ N m (1)
ed è diretto perpendicolarmente al piano di figura in verso uscente. Conseguentemente, l'accelerazione angolare della barra è uscente e pari a $\alpha = \tau / I$ (2)
dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per O e perpendicolare al piano di figura. $I = m\frac{4}{9}L^2 + m\frac{1}{9}L^2 + m\frac{1}{12}L^2 + m\frac{1}{36}L^2 = m\frac{2}{3}L^2 = 0.667\ \text{Kg m}^2$ (3)
Sostituendo nella (2) i valori di τ in eq.(1) ed I in eq.(3) si trova

$$\alpha = \frac{3}{4}\frac{g}{L} = 7.35\ \text{rad/s} \tag{4}$$

1.2 - La reazione vincolare e la forza di attrito statico non compiono lavoro perché il punto di contatto fra cuneo e barra resta fermo. Dunque, poiché le altre forze sono conservative (forze peso), si conserva l'energia meccanica. Assumendo come zero dell'energia potenziale la posizione iniziale, allora l'energia meccanica iniziale è nulla. Dunque, anche l'energia meccanica finale è nulla. Ma quando la barra tocca terra, il centro di massa che si trova a distanza $d = L/6$ da O ha compiuto una rotazione di un angolo θ attorno a tale punto. Dalla figura si deduce che l'angolo θ che la barra fa con l'orizzontale quando l'estremo sinistro è a terra deve soddisfare la relazione trigonometrica: $\sin\theta = h/(2L/3) = 0.15$ (5)
Conseguentemente il centro di massa si trova in basso rispetto alla posizione iniziale della quantità:

$$\delta = L(\sin\theta)/6 = h/4 \tag{6}$$

Si osservi che la relazione $\delta = h/4$ poteva anche essere ottenuta direttamente utilizzando il seguente argomento: l'estremo sinistro della sbarra si trova a distanza $2L/3$ da O e si sposta di h verso il basso , mentre il centro di massa si trova a distanza $L/6$ da O e si sposta di δ verso il basso. E' evidente che deve esistere la seguente relazione $h : 2L/3 = \delta : L/6$ da cui si deduce $\delta = h/4$.
L'energia meccanica è, quindi: (7)

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{mgL}{2}\sin\theta = 0$$

Sostituendo nella (7) il valore di I in eq.(3), si trova

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{L^2}h} = 1.48\ rad/s \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- La fune è inestensibile e, quindi, l'accelerazione di ogni suo punto è la stessa. Dunque l'accelerazione a_2 del corpo 2 è uguale all'accelerazione del punto P sulla sommità del cilindro. D'altra parte, in un rotolamento puro, l'accelerazione di un punto sulla sommità del cilindro è il doppio dell'accelerazione a_1 del centro di massa. Dunque $a_2 = 2\,a_1$ (1)
Le equazioni cardinali per il moto dei due corpi sono (assumendo F_s orientata in verso opposto ad x e prendendo come polo il punto di contatto fra cilindro e piano orizzontale) :

$$T - F_s = m\,a_1 \tag{2}$$

$$T\,2r = 3mr^2\alpha_1/2 = 3mra_1/2 \quad\Rightarrow\quad T = \frac{3}{4}ma_1 \tag{3}$$

e $$mg - T = m\,a_2 = 2\,m\,a_1 \tag{4}$$

dove abbiamo sfruttato nella (3) la condizione di rotolamento puro $\alpha_1 = a_1/r$. Sostituendo la (3) nella (4) si trova, dopo semplici passaggi: $a_1 = 4g/11 = 3.56\ \text{m/s}^2$ (5)
mentre, sostituendo la (3) nella (2) si trova : $F_s = -\,m\,a_1/4 = -\,mg/11 = -\,0.891$ N (6)
e, sostituendo la (5) nella (3) si trova: $T = 3\,mg/11 = 2.67$ N (7)

2.2 – Sulla carrucola le funi esercitano le forze di tensione $\boldsymbol{T}_1 = (-T, 0)$ e $\boldsymbol{T}_2 = (0, -T)$.
Ne consegue che la reazione $\boldsymbol{R}$ della carrucola deve soddisfare la relazione

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2 = (T, T) = (2.67 \text{ N}, 2.67 \text{ N}) \qquad (8)$$

Il cilindro non scivola se $|F_s| < \mu mg$, cioè se il coefficiente di attrito statico soddisfa la relazione $\mu > \mu_{min} = |F_s|/(mg)$. Dunque, il minimo valore di μ è $\mu_{min} = |F_s|/(mg) = 0.091$ (9)

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – La temperatura iniziale dei gas in Kelvin è $T_0 = 173$ K. I dati del problema permettono di calcolare il numero di moli presenti nei due recipienti che sono:

$$n_1 = \frac{p_1 V}{RT_0} = 6.95\ 10^{-2} \text{ moli} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{p_2 V}{RT_0} = 13.9\ 10^{-2} \text{ moli} \qquad (1)$$

Dopo la chiusura del rubinetto i gas si mescolano fino a raggiungere il nuovo equilibrio. Poiché non vi sono pistoni su cui i gas possono compiere lavoro, il lavoro L complessivo fatto dai gas è nullo. Inoltre non c'è calore Q che fluisce dai gas verso l'esterno dall'esterno perché il sistema è interno ad un contenitore termicamente isolante. Dunque, per il I principio della Termodinamica, anche l'energia totale dei gas non varia ($\Delta U = 0$).
Alla fine i gas dovranno trovarsi in equilibrio termico, cioè alla stessa temperatura T e in equilibrio meccanico, cioè alla stessa pressione p. Alla fine i gas si saranno rimescolati e i numeri di moli nei due recipienti saranno cambiati nei nuovi valori N_1 e N_2 . Per la conservazione della massa, però, N_1 e N_2 dovranno soddisfare la relazione

$$N_1 + N_2 = n_1 + n_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2p\,V}{RT} = \frac{(p_1 + p_2)V}{RT_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{(p_1 + p_2)}{2} = 1.5\ 10^5 \text{ Pa} \qquad (2)$$

dove abbiamo applicato la legge dei gas perfetti. La temperatura finale si ottiene sfruttando la condizione che l'energia finale del sistema è uguale a quella iniziale, cioè:

$$\frac{3}{2}(n_1 + n_2)RT_0 = \frac{3}{2}(N_1 + N_2)RT \quad \Rightarrow \quad T = T_0 = 173 \text{ K} \qquad (3)$$

Dove abbiamo sfruttato la conservazione della massa (prima uguaglianza a sinistra in eq.(2)) per eliminare i numeri di moli. Si osservi che l'uguaglianza delle pressioni e delle temperature nei due contenitori implica anche che $N_1 = pV/(RT) = N_2$. Indicando con N il valore di N_1 e N_2, si trova:

$$N = (n_1 + n_2)/2 = 10.4\ 10^{-2} \text{ moli} \qquad (4)$$

3.2 - Dopo che viene rimosso il contenitore, il calore inizia a fluire attraverso i recipienti finché, all'equilibrio la temperatura finale dei gas diventa uguale a quella dell'ambiente esterno $T = T_a = 20$ °C = 293 K. Il processo sarà ovviamente **irreversibile** poiché avviene bruscamente e non attraverso stati di equilibrio e la trasformazione sarà **isocora** perché il gas contenuto nel recipiente di volume 2 V costituito dai 2 contenitori mantiene inalterato il volume. Dunque, il gas non compie lavoro, cioè

$$\text{L} = 0. \qquad (5)$$

Per il I Principio della Termodinamica, il calore Q assorbito dai gas è pari alla variazione totale di energia interna $\Delta U = \frac{3}{2}(N_1 + N_2)RT - \frac{3}{2}(N_1 + N_2)RT_0$. Sfruttando la relazione (4), si trova, infine, che il calore assorbito è

$$Q = 3NR(T - T_0) = \quad 311 \text{ J} \qquad (6)$$