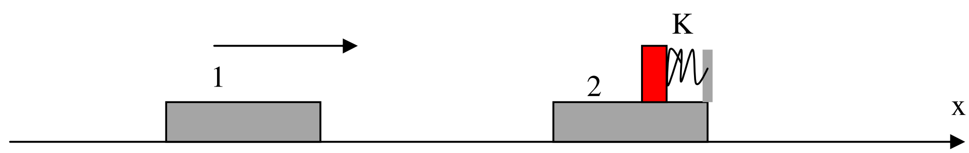
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 19 FEBBRAIO 2018

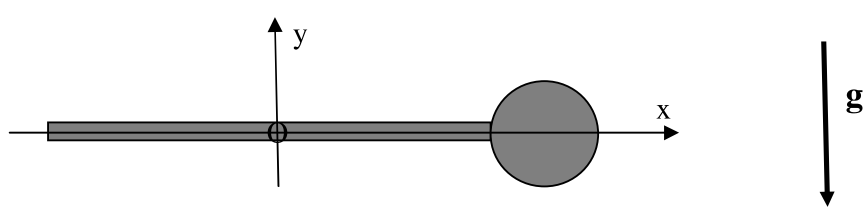
Esercizio 1 - Un carrello 1 di massa $M = 100$ kg si muove nel verso positivo dell'asse x. Al tempo $t = 0$ il carrello urta <u>elasticamente</u> in un tempo brevissimo con velocità $v_0 = 10$ m/s il carrello 2 fermo e di massa identica. Sul carrello si trova un corpo di massa $m = 10$ kg collegato ad una molla ideale di costante elastica $K = 10^4$ N/m in posizione di riposo. Considerando trascurabili tutti gli attriti



1.1 – Si calcoli la velocità acquistata dal carrello 2 e dal corpo di massa m subito dopo l'urto. Si dica, giustificando la conclusione, se la risposta al quesito precedente cambierebbe nel caso in cui fosse presente un attrito fra pavimento e carrelli.

1.2 - Si calcoli l'allungamento massimo Δx raggiunto dalla molla nel moto successivo.

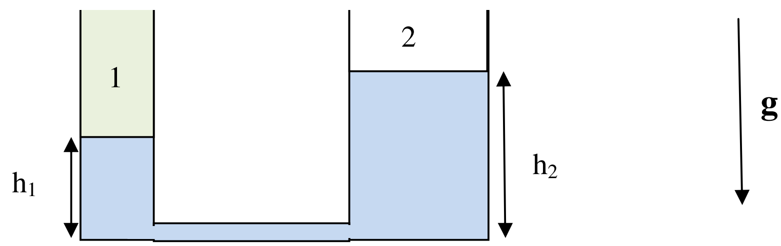
Esercizio 2 - Il sistema in figura è costituito da una barra di massa $m = 2$ kg di lunghezza $L = 0.5$ m e una sfera di massa identica e raggio $r = 10$ cm. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro O della barra. Inizialmente la barra è disposta orizzontalmente come in figura e viene lasciata libera di ruotare ad un dato istante $t = 0$.



2.1 – Si trovino le coordinate x ed y del centro di massa del sistema e il suo momento di inerzia rispetto all'asse passante per O e perpendicolare al piano di figura.

2.2 – Si trovi l'accelerazione angolare del sistema all'istante $t = 0$ in cui viene lasciato libero di ruotare e si trovino le componenti x ed y della reazione $\boldsymbol{R}$ esercitata dall'asse allo stesso istante.

Esercizio 3 – Due contenitori cilindrici 1 e 2 di sezione $S_1 = 10^{-2}$ m^2 e $S_2 = 5\ S_1 = 5\ 10^{-2}$ m^2 sono collegati sul fondo da un tubicino di sezione trascurabile e sono riempiti parzialmente di acqua fino ad una altezza h = 10 cm. Ad un dato istante nel contenitore 1 viene immesso un litro di olio avente densità ρ_o = 800 Kg/m^3 e si aspetta che il sistema raggiunga l'equilibrio. Tutto il sistema si trova in presenza di un'atmosfera a pressione p_0 = 1000 Pa.



3.1 – Si trovi la differenza di altezza della superficie dell'acqua $\Delta h = h_2 - h_1$ fra i due recipienti (vedi figura).

3.2 – Si trovi la pressione finale presente sul fondo del contenitore *2*.

(si usi il valore R = 8.315 J/(K mole) e il valore ρ = 1000 Kg / m^3 per la densità dell'acqua)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es.1- 1.1 – Nell'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema dei tre corpi lungo l'asse x perché non ci sono forze esterne impulsive agenti sul sistema lungo l'asse x. La componente x della quantità di moto del sistema è inizialmente pari a Mv_0. D'altra parte sul corpo di massa m non agiscono forze impulsive lungo x (l'unica forza lungo x è la forza elastica che non è impulsiva) e, quindi, si conserva anche la quantità di moto del corpo di massa m. Poiché esso era fermo prima dell'urto, esso resta fermo anche immediatamente dopo l'urto, cioè la sua velocità è

$$v_m = 0 \tag{1}$$

Ma allora la conservazione della quantità di moto del sistema dei tre corpi si riduce a

$$M\,v_0 = M\,v_1 + M\,v_2 \tag{2}$$

Poiché l'urto è elastico si conserva anche l'energia cinetica. Le equazioni che si ottengono sono le stesse che caratterizzano l'urto elastico di due corpi di massa uguale e si sa che, in questo caso dopo l'urto i corpi si scambiano le velocità. Ciò significa che il carrello 1 si ferma mentre il carrello 2 acquista la velocità iniziale del carrello 1. Dunque,

$$v_2 = v_0 = 10 \text{ m/s} \tag{3}$$

La risposta al quesito precedente non cambierebbe se vi fosse attrito. Infatti, la forza di attrito non è impulsiva e, quindi, l'impulso di tale forza è trascurabile nel brevissimo intervallo di tempo in cui avviene l'urto.

1.2- Dopo l'urto, il carrello 1 resta fermo mentre il carrello 2 e il corpo di massa m si muovono. Poiché non c'è attrito, sul sistema di questi ultimi due corpi non agiscono forze esterne lungo l'asse x e, quindi, si conserva ad ogni istante la loro quantità di moto totale lungo x e risulta verificata la relazione

$$M\,v_0 = M\,v_2 + m\,v_m \tag{4}$$

D'altra parte si deve conservare anche l'energia meccanica, cioè:

$$K\,(\Delta x)^2\,/2 + m\,v_m^2\,/2 + M\,v_2^2\,/2 = M\,v_0^2\,/2 \tag{5}$$

Il massimo allungamento della molla viene raggiunto nell'istante in cui le velocità del corpo di massa m diventa uguale a quella del carrello 2, cioè $v_m = v_2$. Sostituendo questa relazione nella (4) e nella (5) si trova, dopo semplici passaggi algebrici

$$v_2 = v_m = M\,v_0\,/\,(M + m) \tag{6}$$

e

$$\Delta x = \sqrt{\frac{mM}{(m+M)K}}\;v_0 = 0.302 \text{ m} \tag{7}$$

Soluzione Es.2.1 – Il sistema è costituito dalla barra di massa m con centro di massa $\boldsymbol{r}_b$ = (0, 0) e dalla sfera di massa m con centro di massa in $\boldsymbol{r}_s$ = ($L/2 + r$,0). Il vettore che individua il centro di massa dele sistema si ottiene, perciò, utilizzando la relazione:

$$\boldsymbol{r}_{CM} = [\,m\,(0, 0) + m\,(L/2 + r,\, 0)]\,/\,2\,m = (L/4 + r/2\,,\, 0) = (\,0.175 \text{ m}\,,\, 0 \text{ m}) \tag{1}$$

Utilizzando il teorema degli assi paralleli si trova che il momento di inerzia rispetto all'asse passante per O e perpendicolare al piano di figura è

$$I_0 = m\, L^2 /12 + 2\, m\, r^2 /5 + m\, (L/2 + r)^2 = 0.295 \text{ Kg m}^2 \tag{2}$$

2.2- Appena il sistema viene lasciato libero di ruotare, esso si trova ancora nella posizione mostrata in figura con velocità angolare $\omega = 0$. L'accelerazione angolare α si ottiene utilizzando la II equazione Cardinale della dinamica dei sistemi

$$\alpha = \Gamma_z / I_0 \tag{3}$$

dove Γ_z è la componente z (asse <u>uscente</u> dal piano di figura) del momento di forza risultante rispetto al polo O. Poiché la reazione è applicata in O essa non contribuisce al momento angolare risultante che è dato solamente dalla forza peso totale applicata sul corpo di massa $2m$ nel centro di massa posto nel punto individuato dal vettore r_{CM} in eq. (1). Conseguentemente

$$\alpha = -\, 2\, m\, (L/4 + r/2)\, g\, /\, I_0 = -\, 23.3 \text{ rad /s}^2 \tag{4}$$

Il segno – indica che la rotazione avviene nel verso orario. La reazione R dell'asse si ottiene utilizzando la I equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi

$$\boldsymbol{R} + 2\, m\, \boldsymbol{g} = 2\, m\, \boldsymbol{a} \tag{5}$$

Dove $\boldsymbol{R} = (R_x\, , R_y\,)$, $\boldsymbol{g} = (\, 0, -\, g)$ e $\boldsymbol{a} = (\, a_x\, , a_y\,)$ è l'accelerazione del centro di massa. La relazione (5) può essere scritta componente per componente nella forma:

$$R_x = 2\, m\, a_x \tag{6}$$

$$R_y = 2\, m\, a_y + 2\, m\, g \tag{7}$$

Il centro di massa descrive un moto circolare (non uniforme) di raggio $r_c = L/4 + r/2 = 0.175$ m attorno all'asse passante per O. In generale, quindi, il centro di massa può avere una componente tangenziale $\alpha\, r_c$ che all'istante iniziale è diretta lungo l'asse y (in verso negativo) ed una radiale o centripeta diretta nel verso negativo delle x. Ma all'istante iniziale la velocità angolare è nulla e, quindi, l'accelerazione centripeta è nulla. Dunque, $a_x = 0$ in eq.(6) da cui si deduce

$$R_x = 0 \tag{8}$$

L' accelerazione tangenziale lungo y è invece pari a

$$a_y = \alpha\, r_c = -\, 4.08 \text{ m/s} \tag{9}$$

sostituendo il valore di a_y insieme a quello di g in eq.(7) si trova:

$$R_y = 22.9 \text{ N} \tag{10}$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – Per la legge di Stevino, la pressione all'interfaccia acqua-olio all'altezza h_1 in figura è pari a

$$p_1 = p_0 + \rho_o\, g\, h^* = \; p_0 + \rho_o\, g\, V / S_1 = \; 1784 \text{ Pa} \tag{1}$$

dove h^* è l'altezza dello strato di olio e $V = 10^{-3}$ m^3 è il volume di olio. Analogamente, nel recipiente 2 la pressione dell'acqua nel punto alla stessa altezza di h_1 è

$$p_2 = p_0 + \rho\, g\, (h_2 - h_1) \tag{2}$$

dove ρ è la densità dell'acqua pari a 1000 kg/m^3. Per la legge dei vasi comunicanti, $p_1 = p_2$, dunque

$$h_2 - h_1 = \rho_o\, V / (\rho\, S_1) = 0.08 \text{ m} \tag{3}$$

3.2 – Il volume dell'acqua deve restare sempre uguale al volume iniziale che è

$$V_i = (\, S_1 + S_2\,)\, h = 6\, S_1\, h = 6\ 10^{-3} \text{ m}^3 \tag{4}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $S_2 = 5\, S_1$. Dunque, ad ogni istante deve valere l'uguaglianza

$$S_1\, h_1 + S_2\, h_2 = S_1\, h_1 + 5\, S_1\, h_2 = 6\, S_1\, h \tag{5}$$

Dividendo entrambi gli ultimi 2 membri della (5) per S_1 si trova

$$h_1 + 5\ h_2 = 6\, h \tag{6}$$

Risolvendo il sistema di equazioni (3) e (6) si trovano le incognite h_1 e h_2 :

$$h_1 = h - 5\rho_o\, V / (6\rho\, S_1) = 0.0333 \tag{7}$$

$$h_2 = h + \rho_o\, V / (6\rho\, S_1) = 0.1133 \tag{8}$$

dunque, la pressione sul fondo del recipiente 2 che inizialmente è

$$p_i = p_0 + \rho\, g\, h = 1980 \text{ Pa} \tag{9}$$

diventa $$p_f = p_0 + \rho\, g\, h_2 = 2110 \text{ Pa} \tag{10}$$