APPUNTI SCHEMATICI CONCERNENTI DERIVATE, INTEGRALI INDEFINITI E INTEGRALI DEFINITI

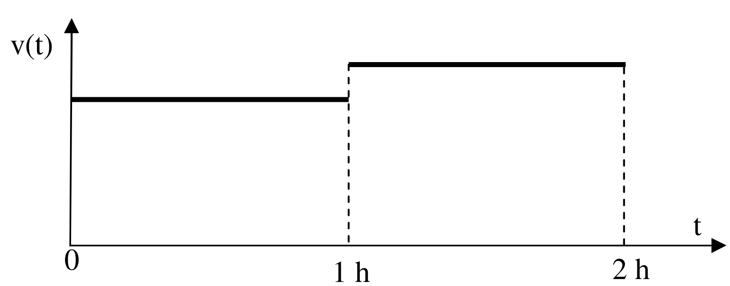
Questi brevi appunti sono rivolti essenzialmente a quegli studenti che non conoscono i concetti di derivate ed integrali che sono, invece, necessari per una buona comprensione del corso di Fisica Generale. Ovviamente, entrambi i concetti di derivata e integrale verranno svolti in modo approfondito e rigoroso nel corso di Analisi e, quindi, nel seguito discuteremo solamente gli aspetti essenziali ed intuitivi di questi concetti in modo assolutamente non rigoroso lasciando al corso di Analisi una formalizzazione più appropriata. Gli studenti dovrebbero, poi, cercare di esercitarsi nel calcolo di derivate ed integrali di funzioni semplici risolvendo gli esercizi proposti nel testo. Se lo studente non riuscisse a trovare le soluzioni riportate, esso è consigliato di rivolgersi al professore. Nel seguito, supporremo sempre che le funzioni di cui parleremo sono funzioni CONTINUE con tutte le loro derivate come avviene solitamente in Fisica.

A volte le funzioni che si presentano in Fisica sono discontinue ma questa discontinuità è quasi sempre fittizia e dovuta ad una eccessiva schematizzazione del problema fisico. Supponiamo, ad esempio, di voler descrivere il moto di un'automobile che parte da una certa località e che viaggia con velocità costante di 80 km/h su una strada rettilinea e supponiamo che, dopo un'ora dall'inizio del viaggio, l'automobile in un breve tempo raggiunga la velocità di 100 km/h e prosegua a tale velocità per un'altra ora. Possiamo schematizzare la velocità della macchina con la funzione $v(t)$ definita nel seguente modo:

$v(t) = 60$ km/h per $t < 1$ h

e $v(t) = 100$ km/h per $2\text{ h} > t > 1\text{ h}$

Questa schematizzazione rende certamente semplice l'analisi del moto ed è, quindi, utile. La funzione scritta sopra è ovviamente DISCONTINUA in $t = 1$ h (vedi figura a). Tuttavia, la discontinuità non è reale e deriva solamente dal fatto che abbiamo trascurato il fatto che l'automobile non può passare istantaneamente dalla velocità $v = 80$ Km/h alla velocità di 100 km/h, ma impiegherà necessariamente un certo tempo, seppur piccolo rispetto ad 1 h, per raggiungere la velocità finale. Durante tale piccolo intervallo di tempo la velocità crescerà in modo graduale senza variazioni improvvise e $v(t)$ sarà sempre una funzione continua.



RIASSUNTO SCHEMATICO DEL CONCETTO DI DERIVATA (1)

~~[illegible]~~ CHE È NECESSARIO PER UNA COMPRENSIONE DELLA FISICA.

Questi concetti vengono riassunti in modo schematico e non rigoroso lasciando all'approfondimento e al rigore i corsi di analisi. A tale scopo ci limiteremo a considerare il caso di particolare interesse per il corso di Fisica in cui consideriamo funzioni $f(t)$ definite per ogni valore della variabile reale e continue.

<u>Definizione di derivata</u> $\frac{dx}{dt}$ (spesso si usa il simbolo x' o $\dot{x}$)

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

dove abbiamo definito la variazione Δx della funzione $x(t)$ nell'intervallo di t $[t, t+\Delta t]$ come il valore finale $x(t+\Delta t)$ meno il valore iniziale $[x(t)]$. Come si vede dalla figura 1, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo θ di figura 1.

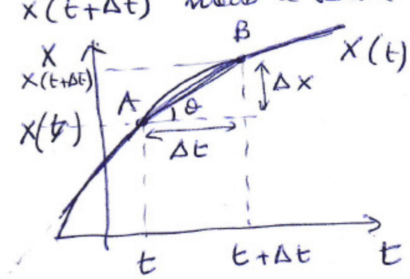


figura 1

Per Δt che si avvicina ad assumere valori sempre più piccoli ($\Delta t \to 0$), il punto B sulla curva $x(t)$ in figura si avvicina ad A e il segmento AB tende ~~[illegible]~~ a giacere sulla retta tangente nel punto A alla curva $x(t)$, dunque l'angolo θ tende a coincidere con l'angolo θ_0 formato dalla retta tangente alla curva $x(t)$ in A con l'asse orizzontale. Dunque, il valore della derivata è

$$\frac{dx}{dt} = \tan\theta_0 \qquad (2)$$

dove θ_0 = angolo fra la retta tangente a $x(t)$ in A e l'asse orizzontale.

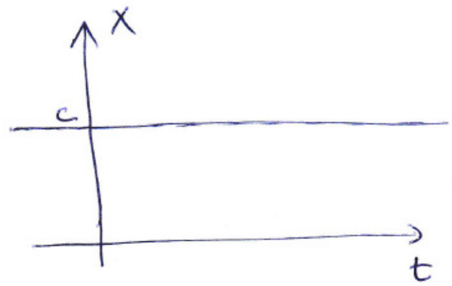
ALCUNE DERIVATE FONDAMENTALI

a_1) derivata di una costante: $x(t) = c = \text{costante}$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{c-c}{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dc}{dt} = 0}$$

La derivata di una funzione costante è nulla. Questo risultato si deduce immediatamente se si osserva il grafico della funzione $x(t) = c$ che è una retta orizzontale parallela all'asse t a distanza c da essa. La tangente a tale retta in qualunque punto è, ovviamente la retta stessa che fa un angolo $\theta_0 = 0$ con l'asse $t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \tan\theta_0 = 0$

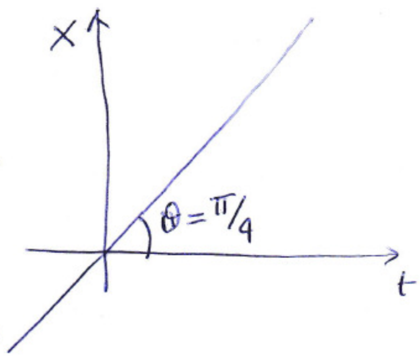


a_2) derivata di $x(t) = t$.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{t+\Delta t - t}{\Delta t} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\cancel{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1$$

Anche in questo caso il risultato risulta ovvio se si considera l'interpretazione geometrica della derivata. Infatti la funzione $x = t$ è una retta che forma l'angolo $\theta = \pi/4$ con l'asse t. La tangente in ogni punto a tale retta è la retta stessa che, quindi, fa l'angolo $\theta_0 = \theta = \pi/4$.



$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

3) <u>Derivata della funzione $x = t^2$</u>

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{\cancel{t^2} + 2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

per trovare $\frac{dx}{dt}$ dobbiamo fare il limite dell'espressione superiore per $\Delta t \to 0$. Ma per $\Delta t \to 0$ l'espressione sopra tende a coincidere con

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

4) <u>derivata di una funzione $X = t^\alpha$</u> con α = numero reale

<u>Si può dimostrare che</u> (A)

$$\boxed{\frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}}$$

si noti che $x(t) = 1$ (funzione costante di valore 1) e $x(t) = t$ sono casi particolari della (A)

infatti $1 = t^0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \frac{d\,1}{dt} = 0$ funzione costante

come avevamo trovato per una generica $x(t) = c$.

analogamente, $x = t$ è il caso particolare della (A) per $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} t = \frac{d}{dt}(t^1) = 1\, t^{1-1} = 1\, t^0 = 1$$

La (5) verrà utilizzata <u>molto spesso</u> nel corso e, quindi, andrebbe memorizzata.

Altre derivate fondamentali che vengono utilizzate spesso sono:

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t \qquad (B)$$

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t} \qquad (C) \qquad (\ln = \text{logaritmo in base } e)$$

$$\frac{d}{dt} \cos t = - \sin t \qquad (D)$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t \qquad (E)$$

Ovviamente, $\frac{dx}{dt}$ è ancora una funzione di t (ad esempio, la derivata di t^2 è $2t$). Dunque, si può definire anche una nuova funzione che è la derivata della derivata di x che chiamiamo derivata seconda e indichiamo con il simbolo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

esempio: la derivata seconda di $x = t^2$ è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} t^2\right) = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

Per il calcolo della derivata di funzioni diverse da quelle note sono utili alcune proprietà dell'operatore derivata che riassumiamo nel seguito:
In primo luogo, la derivata della funzione $a\,x(t)$ dove a è una costante e $x(t)$ una funzione, soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt}\left[a\,x(t)\right] = a \frac{d}{dt} x(t)$$

Inoltre vale il principio di sovrapposizione

$$\frac{d}{dt}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = \frac{d}{dt} x_1(t) + \frac{d}{dt} x_2(t)$$

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalla definizione di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} X_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} X_2(t) \qquad (\mathrm{I})$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sono due funzioni di t.

La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i X_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} X_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_N X_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(X_1(t)\, X_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} X_1\right) \cdot X_2 + X_1 \left(\frac{d}{dt} X_2\right) \qquad (\mathrm{II})$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $X_1(t), X_2(t) \dots X_n(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(X_1(t) X_2(t) \dots X_n(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} X_1\right) X_2 X_3 \cdots X_N + X_1 \left(\frac{d}{dt} X_2\right) X_3 \cdots X_n + \dots + X_1 X_2 \cdots X_{n-1} \frac{d}{dt}(X_n)$$

III) ~~DERIVATA~~ DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$X(t) = \cos(t^2)$

Per trovare $X(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $X(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalla definizione di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (\mathrm{I})$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due funzioni di t.

La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} x_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_N x_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) \cdot x_2 + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) \qquad (\mathrm{II})$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t) \dots x_N(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) x_2 x_3 \cdots x_N + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) x_3 \cdots x_N + \dots + x_1 x_2 \cdots x_{N-1} \frac{d}{dt}(x_N)$$

III) DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$$x(t) = \cos(t^2)$$

Per trovare $x(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $x(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalle definizioni di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella ⑤

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (I)$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due funzioni di t.
La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} x_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_N x_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) \cdot x_2 + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) \qquad (II)$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t) \dots x_N(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) x_2 x_3 \cdots x_N + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) x_3 \cdots x_N + \dots + x_1 x_2 \cdots x_{N-1} \frac{d}{dt}(x_N)$$

III) DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$x(t) = \cos(t^2)$

Per trovare $x(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $x(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalle definizioni di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (\mathrm{I})$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due funzioni di t.

La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} x_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_N x_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) \cdot x_2 + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) \qquad (\mathrm{II})$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t) \cdots x_N(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) x_2 x_3 \cdots x_N + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) x_3 \cdots x_N + \dots + x_1 x_2 \cdots x_{N-1} \frac{d}{dt}(x_N)$$

III) DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$x(t) = \cos(t^2)$

Per trovare $x(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $x(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalla definizione di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (I)$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due funzioni di t.

La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} x_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_N x_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) \cdot x_2 + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) \qquad (II)$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $x_1(t), x_2(t) \ldots x_N(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t) \cdots x_N(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) x_2 x_3 \cdots x_N + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) x_3 \cdots x_N + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_{N-1} \frac{d}{dt}(x_N)$$

III) DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$$x(t) = \cos(t^2)$$

Per trovare $x(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $x(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

Quest'ultime relazioni (che si possono verificare facilmente dalla definizione di derivata in eq.(1)) si possono riassumere nella

I) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$$\frac{d}{dt}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + a_2 \frac{d}{dt} x_2(t) \qquad (\mathrm{I})$$

dove a_1 e a_2 sono due coefficienti costanti e $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due funzioni di t.
La (I) si generalizza anche al caso di una somma in cui compaiono N contributi

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d}{dt} x_i(t)$$

dove usiamo la definizione $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_N x_N$

II) DERIVATA DI UN PRODOTTO DI FUNZIONI

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) \cdot x_2 + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) \qquad (\mathrm{II})$$

anche questa espressione si generalizza immediatamente al caso di più funzioni $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1(t)\, x_2(t) \dots x_N(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} x_1\right) x_2 x_3 \cdots x_N + x_1 \left(\frac{d}{dt} x_2\right) x_3 \cdots x_N + \dots + x_1 x_2 \cdots x_{N-1} \frac{d}{dt}(x_N)$$

III) DERIVATA DI FUNZIONE DI FUNZIONE

Supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione

$$x(t) = \cos(t^2)$$

Per trovare $x(t)$ dobbiamo prima calcolare il valore corrispondente della funzione $f(t) = t^2$ e, poi, il valore della funzione $g = \cos$. Dunque, $x(t) = g(f(t))$. Si dimostra che vale l'identità:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{d}{dg} f(g) \cdot \frac{d}{dt} f(t) \qquad (\text{III})$$

anche questo risultato si generalizza immediatamente al caso in cui si abbia a che fare con funzione di funzione di funzione .....

Esempio 1) nel caso $x(t) = \cos(t^2)$

si pone $g = t^2$ e $f(g) = \cos g$

$$\Rightarrow \frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{d f(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = -\sin g \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

Esempio 2: $x(t) = \frac{1}{\cos t}$

$f(t) = \cos t \qquad g(f) = \frac{1}{f} = f^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dt} = -f^{-2}(-\sin t) = \frac{1}{\cos^2 t} \sin t$$

ESERCIZI RIASSUNTIVI PROPOSTI

trovare le derivate delle seguenti funzioni:

1) e^{5t} (soluzione: $5e^{5t}$)
2) $e^{\sqrt{t}}$ (soluzione: $\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$)
3) $(\sin t)^3$ (soluzione: $3(\sin^2 t)\cos t$)
4) $3t^2 + \sqrt{t}$ (soluzione: $6t + \frac{1}{2\sqrt{t}}$)
5) $t \ln t$ (soluzione: $1 + \ln t$)
6) $\sqrt{1+t^2}$ (soluzione $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$)
7) $\frac{\sin t}{\cos t}$ (soluzione $\frac{1}{\cos^2 t}$)

I RISULTATI RIPORTATI A DESTRA SI OTTENGONO UTILIZZANDO LE DERIVATE ELEMENTARI RIPORTATE SOPRA E LE PROPRIETÀ DELL'OPERATORE DERIVATA. SE LO STUDENTE NON FOSSE IN GRADO DI RITROVARE TALI SOLUZIONI È CONSIGLIATO DI RIVOLGERSI AL PROF

LA LINEARIZZAZIONE DI UNA FUNZIONE

Il concetto di derivata prima è molto utile anche per ottenere espressioni semplici (lineari) di funzioni complesse. Questa procedura viene applicata spesso in Fisica per risolvere problemi altrimenti irrisolubili. Consideriamo, ad esempio, una generica funzione $X(t)$ continua come mostrato in figura 2a.

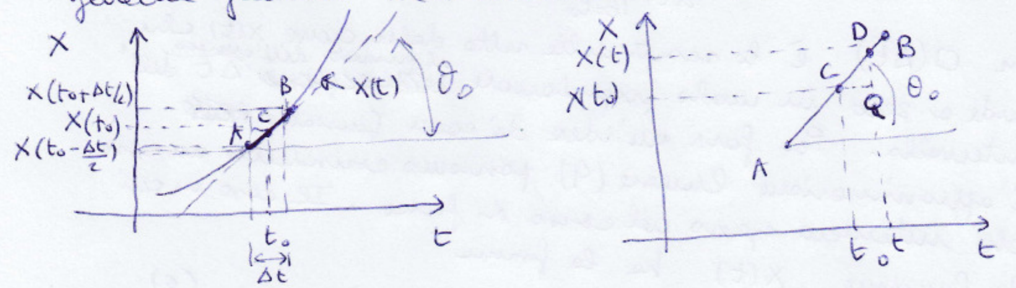


fig 2a

E' evidente dalla figura (e si può dimostrare in modo rigoroso) che se ci restringiamo ad un intervallo di t molto piccolo $[t_0-\frac{\Delta t}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}]$, in questo intervallo la curva è quasi interamente coincidente con un segmento di retta (segmento AB in figura) tangente alla curva nel punto C corrispondente a $t=t_0$. Ma sappiamo che l'inclinazione della retta θ_0 è legata alla derivata di $X(t)$ calcolata per $t=t_0$ dalla relazione

$$\tan\theta_0 = \left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \tag{3}$$

L'equazione della retta che è tangente alla curva nel punto C di coordinate $(t_0, X(t_0))$ si ottiene (vedi fig 2b dove c'è un ingrandimento) osservando che, se indichiamo con t un generico valore compreso nell'intervallo $[t_0-\frac{\Delta t}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}]$ allora possiamo considerare il triangolo rettangolo di figura CDQ e scrivere

$$\frac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0} = \tan\theta_0 = \left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$$

da cui si deduce immediatamente dopo semplici passaggi

$$X(t) = X(t_0) + \left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=t_0}(t-t_0) \tag{4}$$

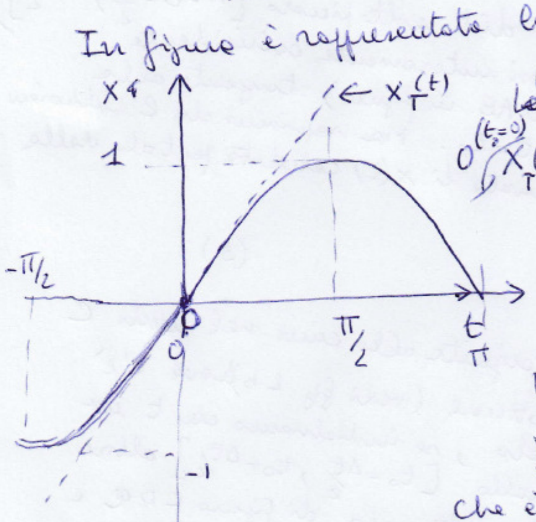
che rappresenta l'equazione della retta tangente in C alla curva $X(t)$. Con questa scelta si è sostituito alla complessa espressione $X(t)$ una espressione lineare che permette di semplificare notevolmente il problema. Naturalmente, la (4) è solo un'approssimazione che diventa sempre più precisa quanto più Δt è piccolo. Ad esempio, se in figura 2a si raddoppiasse Δt si vede chiaramente che la retta tangente devia apprezzabilmente dalla curva $x(t)$ agli estremi dell'intervallo Δt. Dunque il valore esatto di $x(t)$ non è quello dato da eq.(4) ma è

$$x(t) = x(t_0) + \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0}(t-t_0) + O(\Delta t^2) \qquad (5)$$

dove $O(\Delta t^2)$ è lo scarto della retta dalla curva $x(t)$ che tende a zero in modo proporzionale al quadrato dell'ampiezza Δt dell'intervallo. Per farsi un'idea di come funziona l'approssimazione lineare (4) possiamo considerare un caso che interviene spesso nel corso di fisica. Il caso in cui la funzione $x(t)$ ha la forma

$$x(t) = \sin t \qquad (6)$$

In figura è rappresentata la (6)



La equazione della retta tangente nell'origine O $(t_0=0)$ $X_T(t)$ si ottiene dalla (4) osservando che

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(\sin t)\right|_{t=0} = \cos t\Big|_0 = 1$$

e $x(0) = 0$

Dunque

$$X_T(t) = t \qquad (7)$$

che è la retta bisettrice mostrata in figura. Dalla figura si deduce che l'approssimazione lineare è sicuramente molto buona per piccoli valori di t mentre essa si discosta apprezzabilmente dalla curva $x(t)$ quando t comincia a diventare superiore a circa un terzo dell'intervallo $\pi/2$ cioè per $t > \frac{\pi}{6} \simeq 30°$.
Nella tabella successiva sono riportati alcuni valori di $x(t)$ e $X_T(t)$ al variare di t nell'intervallo di t compreso fra 0 e $\pi/2$. ATTENZIONE! per il calcolo di $X_T(t)$ il valore t di eq.(7) è in RADIANTI!

$X(t)$	$X_T(t)$	errore relativo $\dfrac{X_T(t)-X(t_0)}{X_T(t)}$	$t°$
0,0174524	0.0174533	5×10^{-5}	1°
0.1736481	0.1745329	5×10^{-3}	10°
0.342020	0.3490658	2×10^{-2}	20°
0.5000000	0.523598	4.5×10^{-2}	30°
0.76604	0.87266	11×10^{-2}	50°
1,000000	1.57079	36×10^{-2}	90°

per semplicità di lettura abbiamo riportato il valore in gradi ma per calcolare $X_T(t)$ abbiamo utilizzato il valore di t in radianti

$$t(\text{radianti}) = t(\text{gradi}) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Si osserva che $X_T(t)$ approssima molto bene $X(t)$ sotto $t = 10°$ (l'errore relativo è inferiore al $5 \cdot 10^{-3} =$ 0.5 %).

Inoltre si vede anche che, per piccoli t, l'errore cresce in modo proporzionale a t^2 come riportato in eq. (5) infatti per $t = 1°$ l'errore è 5×10^{-5} mentre per $t = 10°$ che è 10 volte maggiore a $t = 1°$ l'errore aumenta per un fattore $(10)^2 = 100$ e diventa 5×10^{-3}.

RIASSUNTO SCHEMATICO DEI CONCETTI DI INTEGRALE INDEFINITO E DI INTEGRALE DEFINITO

A) INTEGRALE INDEFINITO

L'integrale indefinito rappresenta l'operatore inverso dell'operatore derivata e si rappresenta con il simbolo

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad (1)$$

Per definizione, $F(x)$ è quella funzione la cui derivata è $f(x)$, cioè

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (2)$$

$$F(x) \xrightarrow[\downarrow]{\text{operazione derivata}} f(x)$$

$$F(x) \xleftarrow{\text{Operazione inversa (INTEGRALE)}} f(x)$$

è immediato verificare che la funzione $F(x)$ non è unica: ci sono infinite funzioni $G(x)$ che soddisfano la relazione (2). In particolare, se

$G(x) = F(x) + c$ dove c è una costante arbitraria,

allora $\dfrac{dG(x)}{dx} = \dfrac{dF(x)}{dx} + \dfrac{dc}{dx} = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

quindi anche $G(x)$ rappresenta un possibile integrale indefinito di $f(x)$. Si può dimostrare che se $F(x)$ soddisfa la (2) allora le uniche altre funzioni che soddisfano la (2) (e, quindi, per definizione la (1)), hanno la forma $G(x) = F(x) + c$.

Poiché l'INTEGRALE INDEFINITO RAPPRESENTA l'operazione inversa all'operazione di DERIVATA è facile trovare alcuni integrali indefiniti di molte funzioni. Basta, infatti, utilizzare le espressioni note delle derivate di date funzioni. Ad esempio, avevamo scritto in precedenza alcune derivate elementari di funzioni di t (attenzione!, qui usiamo come nome di variabile x ma avremmo potuto anche indicare la variabile con t come in precedenza):

1) derivata di $f(x) = x^{\alpha}$: $\frac{d\,x^{\alpha}}{dx} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

ma ciò significa che

$$\int x^{\beta}\, dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + c \qquad (2)$$

Infatti, derivando $\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + c$ rispetto ad x si ottiene proprio l'integrando x^{β}. Infatti:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + c\right] = \frac{d}{dx}\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}\frac{d}{dx}x^{\beta+1} = \frac{\beta+1}{\beta+1}\, x^{\beta+1-1} = x^{\beta}$$

2) sappiamo che $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

dunque, se $F(x) = -\cos x + c$ e $f(x) = \sin x$
si verifica immediatamente che $\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$
cioè

$$\int \sin x\; dx = -\cos x + c \qquad (3)$$

3) Analogamente, è facile ottenere (utilizzando $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$)

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \qquad (4)$$

mentre da $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ si deduce

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c \qquad (5)$$

e da $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$ si deduce

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} \qquad (6)$$

Per il calcolo dell'integrale Indefinito di funzioni più complesse risultano utili alcune relazioni.
In primo luogo è facile verificare che come l'operatore derivata anche l'operatore Integrale è un operatore lineare, cioè:

A1) LINEARITÀ DELL' INTEGRALE INDEFINITO

$$\int [a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)]\, dx = a_1 \int f_1(x)\, dx + \cdots + a_N \int f_N(x)\, dx \qquad (A1)$$

dove $a_1, \ldots a_N$ = coefficienti reali costanti
$f_1(x) \ldots f_N(x)$ = funzioni arbitrarie di x.

A2) VALE L'IDENTITÀ

$$\int \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) \frac{d}{dx} g(x) \qquad (A2)$$

questa identità viene utilizzata nel metodo di integrazione PER PARTI. Siccome nel nostro corso non sarà necessario utilizzare questo metodo, lo studente può rimandare questo al corso di Analisi concentrandosi invece sul metodo successivo (SOSTITUZIONE DI VARIABILE) che verrà utilizzato spesso e che, quindi, lo studente dovrebbe approfondire facendo esercizi relativi a tale metodo che potrà facilmente trovare in rete.

A3) METODO DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE DELLE VARIABILI

Prima di discutere il caso generale facciamo il semplice esempio che si debba calcolare l'integrale della funzione $f(x) = (x - x_0)^\alpha$ dove x_0 è una costante arbitraria.

$\int (x-x_0)^\alpha dx$

ovviamente, noi sappiamo calcolare immediatamente $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
Dunque, sarebbe utile riuscire a tornare ad una forma di questo tipo. Possiamo, ad esempio, fare ~~una~~ cambiamento di variabile definendo una nuova variabile

$y = x - x_0$

In tal caso l'integrale di partenza $\int (x-x_0)^\alpha dx$ diventa $\int y^\alpha dx$. Purtroppo, la forma trovata non è accettabile perché ~~la~~ funzione integranda dipende da y mentre ~~nell'integ~~ all'interno del simbolo di integrale appare dx. Dunque, per ottenere una forma dell'integrale significativa, bisogna riuscire a ~~xxxx~~ scrivere dx in termini di dy.
Ma per definizione $dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \lim_{x_f \to x_i} (x_f - x_i)$

dove x_i = valore iniziale di x, x_f = valore finale e Δx = ~~xxxx~~ ~~xxxx~~ differenza fra valore finale e valore iniziale.
Analogamente $dy = \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = \lim_{y_f \to y_i} (y_f - y_i)$

ma $\Delta y = y_f - y_i = (x_f - x_0) - (x_i - x_0) = x_f - x_i = \Delta x$
$\Rightarrow \Delta y = \Delta x \Rightarrow dy = \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$
$\Rightarrow dx = dy$. Ma allora

$\int y^\alpha dx = \int y^\alpha dy$

Dunque, l'integrale in termini della variabile y ha la forma corretta (la funzione è y^α che dipende da y e la variazione infinitesima è rispetto la nuova variabile y). In particolare

$$\int y^\alpha dy = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Adesso, se ricordiamo che $y = x - x_0$ e si sostituisce questo valore nella relazione precedente si trova, infine:

$$\int (x-x_0)^\alpha dx = \int y^\alpha dy = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

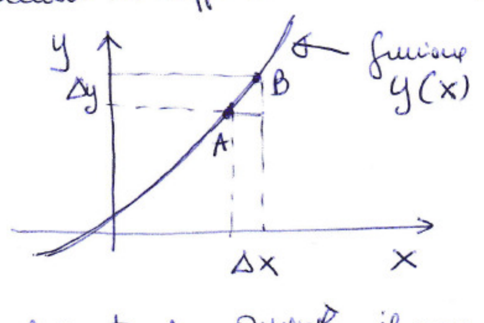
Il caso appena trattato è un caso molto particolare in cui $dx = dy$. In generale, per ottenere dx in funzione di dy si deve utilizzare una metodologia più complessa.
Supponiamo che la nuova variabile y sia legata alla variabile x dalla relazione

$$y = y(x)$$ dove $y(x)$ è una funzione di x.

Allora si può dimostrare che

$$dx = \frac{dy}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \text{(A3)}$$

Nel caso precedente $y = x - x_0$, si ha $\frac{dy}{dx} = 1$ e si ritrova immediatamente il risultato $dx = dy$.
Qualitativamente il risultato (A3) si può facilmente comprendere facendo la rappresentazione di figura sotto. Se l'intervallo



Δx tende a zero (e, quindi, si indica con l'infinitesimo dx) anche Δy tende a zero (dy) e il segmento AB in figura tende a coincidere con la retta tangente a $y(x)$ nel punto A. Dunque il rapporto fra dy e dx tende a coincidere con la derivata di y in a. Dunque si ottiene la (A3) esempio di calcolo per sostituzione

Trovare l'integrale indefinito:

$$\int (\cos x^2)\ x\, dx$$

osserviamo che noi sappiamo calcolare $\int \cos y\ dy$, quindi, una sostituzione utile potrebbe essere

$$y = x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{dy}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{dy}{2x}$$

sostituendo $x^2 = y$ e $dx = \frac{dy}{2x}$ nell'integrando si ottiene

$$\int (\cos x^2) x\, dx = \int (\cos y)\ x\ \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos y\ dy = \frac{\sin y}{2} = \frac{\sin x^2}{2}$$

è facile verificare che $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x^2}{2}\right) = x \cos x^2$

INTEGRALI DEFINITI DI FUNZIONI CONTINUE

Data una funzione $f(x)$ si dice integrale definito nell'intervallo di x compreso fra a e b un valore uguale all'area (con segno) individuata dall'asse x, dalle rette $x=a$ e $x=b$ e dalla curva $f(x)$ (vedi figura 1). La regione tratteggiata in figura 1 individua l'area presa in considerazione.

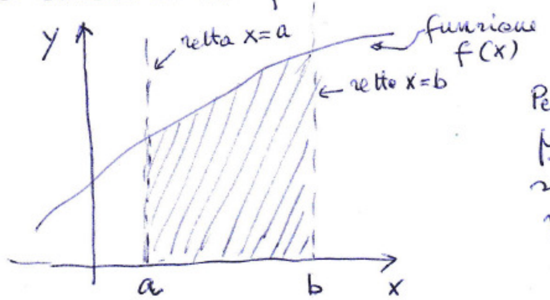


figura 1

Per convenzione l'area è considerata positiva se si trova nel semipiano superiore ($y>0$) e negativa se in quello inferiore ($y<0$)

Formalmente, l'integrale definito di $f(x)$ fra a e b si scrive nella forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Un modo per ottenere un valore approssimato dell'area in oggetto è quello di suddividere l'intervallo $[a,b]$ in n intervallini uguali di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ad esempio, se $n=5$ si ha la situazione mostrata in figura 2.

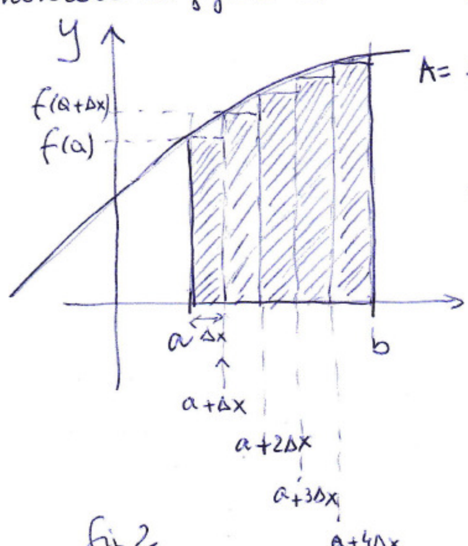


fig 2

In tal caso se si calcola

$$A = f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + f(a+3\Delta x) + f(a+4\Delta x)$$

si ottiene l'area individuata da 5 rettangoli verticali mostrati in figura che approssima (in questo caso per difetto) l'area totale sotto la curva.

L'espressione sopra può essere scritta in modo compatto utilizzando la sommatoria Σ:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\,\Delta x$$

con $n=5$

È facile convincersi che il valore di A ottenuto con la sommatoria diventa sempre più vicino al valore reale dell'area sotto la curva quanto più piccoli diventano gli intervallini, cioè all'aumentare del numero n degli intervallini.
In particolare, nel limite $n \to \infty$, l'area $A = \sum_{i=0}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ tende a coincidere con l'area sotto la curva, cioè con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ora, calcolare l'integrale definito utilizzando questa procedura è ovviamente lungo. Si può ovviare a ciò facendo uso degli integrali indefiniti definiti in precedenza.
In particolare, si dimostra il seguente <u>TEOREMA FONDAMENTALE</u> per il calcolo degli integrali definiti.
Se $f(x)$ è una funzione continua e $F(x)$ è una primitiva (integrale indefinito) di $f(x)$, cioè se $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

← <u>TEOREMA FONDAMENTALE</u>

che si scrive anche nel modo equivalente

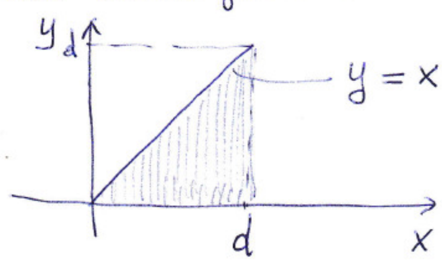
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) \Big]_a^b$$

dove $\Big[F(x)\Big]_a^b$ = differenza fra il valore di $F(x)$ calcolato nell'estremo superiore dell'integrale definito (b) e quello calcolato nell'estremo inferiore (a).
Dunque, il problema del calcolo dell'area si riduce nel problema di trovare l'integrale indefinito della funzione $f(x)$

esempio: calcolare l'area della funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $[0, d]$. Sappiamo che la funzione $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, dunque, per il teorema fondamentale (2)

$$\int_0^d x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^d = \frac{d^2}{2} - 0 = \frac{d^2}{2}$$

Ci si convince immediatamente che questa soluzione è corretta se si osserva che $f(x)=x$ è la bisettrice in figura e che l'area sottesa fra 0 e d è quella del triangolo tratteggiato rettangolo di cateti di lunghezza uguali e pari a d e, quindi, di area $\frac{d^2}{2}$



C'è un'ulteriore relazione MOLTO IMPORTANTE che verrà utilizzata spesso NEL CORSO DI FISICA e che lo studente dovrebbe fare proprio:

Spesso si deve fare l'integrale definito di una funzione $f(x)$ che è pari alla derivata di una data funzione $F(x)$ cioè si deve calcolare $\int_a^b \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

d'altra parte, per ipotesi $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ ma, allora, $F(x)$ è proprio la funzione corrispondente a $\int f(x)\,dx$ dunque per il teorema fondamentale in eq. (2) possiamo scrivere

$$\boxed{\int_a^b \frac{dF(x)}{dX}\,dx = F(b) - F(a)} \Leftarrow \text{RELAZIONE IMPORTANTE}$$

Dunque, l'integrale indefinito della derivata di una funzione $F(x)$ è proprio $F(x)$ stessa.

ESERCIZI RIASSUNTIVI SUGLI INTEGRALI

Per trovare gli integrali richiesti (integrali indefiniti) si devono usare gli integrali noti dati nel testo e la linearità dell'operatore integrale e il metodo di sostituzione. Le funzioni sono date sotto:

1) $2x^2+\sqrt{6x}$ (soluzione: $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{\sqrt{6x}}$)

2) $e^{7x}+\frac{x}{1+x^2}$ (soluzione: $\frac{e^{7x}}{7}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$)

3) $3x^2+7x^4$ (soluzione $x^3+\frac{7}{5}x^5$)

4) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ (soluzione: $2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})$)

5) $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ (soluzione : $e^{\tan x}$)

Lo studente dovrebbe, poi, verificare che, in accordo con la teoria la derivata delle funzioni riportate nelle soluzioni forniscono correttamente le funzioni da integrare 1) .... 5)

SE LO STUDENTE NON FOSSE IN GRADO DI TROVARE LE SOLUZIONI SOPRA RIPORTATE È CONSIGLIATO DI RIVOLGERSI AL PROFESSORE.