

**Primo foglio di esercizi**

Prodotto scalare in  $\mathbf{R}^n$ :  $\langle (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ ;

Prodotto vettore in  $\mathbf{R}^3$ :  $(a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) = (b\gamma - \beta c, -(a\gamma - \alpha c), a\beta - \alpha b)$ ,

quindi  $\langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a, b, c) \rangle = \langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \rangle = 0$ .

**Domande di introduzione**

**Domanda 1** a- Si scriva in forma parametrica in  $\mathbf{R}^2$  la retta passante per i punti  $(-3, 1)$  e  $(-2, -4)$ ;  
b- si scriva un'equazione della stessa retta.

**Domanda 2** Le rette  $(1, 1) + t(1, -1)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  e  $(2 + 2t, 2 - t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  si incontrano?

**Domanda 3** Si scriva in forma parametrica in  $\mathbf{R}^3$  la retta passante per i punti  $(1, -2, 1)$  e  $(-2, 1, -3)$ .  
Si scrivano equazioni della stessa retta.

**Domanda 4** a- Si mostri che per ogni  $m$  le equazioni  $y - mx = 0$ ,  $z = m$  definiscono una retta.  
b- Si mostri che le coppie di rette della famiglia così definite sono sghembe.

**Domanda 5** Si scriva in forma parametrica in  $\mathbf{R}^3$  il piano passante per i punti  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 4, 0)$  e  $(0, -1, 2)$ . Si scriva un'equazione dello stesso piano.

**Domanda 6** Quali delle seguenti coppie di rette nello spazio  $\mathbf{R}^3$  sono sghembe?

a-  $(0, 1, 2) + t(1, 1, 1)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$

b-  $\begin{cases} -1 = x + 2y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - 2y + z \end{cases}$

c-  $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\begin{cases} 1 = x - 2y + z \\ 5 = 4x - 3y + z \end{cases}$

**Domanda 7** Si scrivano le equazioni dei piani del fascio passante per la retta  $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

**Domanda 8** Si calcolino i prodotti *scalare* e *vettore* tra  $(1, 2, 3)$  e  $(-1, 2, -3)$ .

**Domanda 9** Si calcoli il coseno dell'angolo tra le rette in  $\mathbf{R}^4$  date da  $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  
e da  $(t - 3, t - 1, t + 2, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

**Domanda 10** a- Si scriva l'equazione del piano passante per  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(0, 1, 2)$ .  
b- Si calcoli la distanza dello stesso dal punto  $(-1, -1, -1)$ .

**Domanda 11** Si scriva l'equazione del piano passante per il punto  $(1, 1, 1)$  e la retta di equazioni  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$ .

**Domanda 12** Si scriva un'equazione del piano per  $(1, 1, 1)$  parallelo a quello dato da  $3x + 4y + 5z = 1$ .

**Domanda 13** Si scrivano delle equazioni per una retta passante per  $(1, 1, 1)$  e che non interseca il piano dato da  $3x + 4y + 5z = 1$ .

**Domanda 14** Si calcoli la distanza di  $(1, 1, 1)$  dal piano dato da  $3x + 4y + 5z = 1$ .

**Domanda 15** Si calcoli la distanza di  $(1, 1, 1)$  dalla retta data da  $\begin{cases} 1 = 3x + 4y + 5z \\ 0 = x + y + z \end{cases}$ .

**Domanda 16** Si trovi il simmetrico di  $(1, 2, 3)$  rispetto al piano dato da  $3x + 4y + 5z = 1$ .

**Domanda 17** Si trovi il simmetrico di  $(1, 2, 3)$  rispetto alla retta data da  $\begin{cases} 1 = 3x + 4y + 5z \\ 0 = x + y + z \end{cases}$

**Domanda 18** Siano  $v = (a, b)$ ,  $w = (A, B)$  in  $\mathbf{R}^2$ :  $aB - Ab = 0$  se e solo se vi sono  $\lambda$  e  $\mu$  in  $\mathbf{R}$  per cui  $\lambda v + \mu w = (0, 0)$ , cioè  $v$  e  $w$  sono paralleli.

**Domanda 19** Siano  $v = (a, b, c)$ ,  $w = (A, B, C)$  in  $\mathbf{R}^3$ :  $aB - Ab = 0$  e  $bC - Bc = 0$  se e solo se vi sono  $\lambda$  e  $\mu$  in  $\mathbf{R}$  per cui  $\lambda v + \mu w = (0, 0, 0)$ , cioè  $v$  e  $w$  sono paralleli. Si noti che ne segue anche  $aC - Ac = 0$ .

Primo foglio di esercizi:  
esercizi formato esame

**Esercizio 1.** a- Si scrivano le equazioni della retta ottenuta proiettando ortogonalmente la retta di equazioni  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$  sul piano di equazione  $x + 2y + 3z = 4$ .  
b- Si calcoli la distanza del punto  $(1, 1, 1)$  da tale retta.



Primo foglio di esercizi:  
esercizi formato esame

**Esercizio 2.** a- Mostrare che le rette nello spazio  $\mathbf{R}^3$  date da  $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$  sono sghembe.

b- Trovare l'unica coppia di piani paralleli ognuno contenente una delle due precedenti rette.

c- Per quale tra i punti  $P = (1, 1, 1)$  e  $Q = (1, 0, 0)$  passa una retta che interseca le rette date?



Primo foglio di esercizi:  
esercizi formato esame

**Esercizio 3.** a- Mostrare che le rette nello spazio  $\mathbf{R}^3$  date da  $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = 2x - y + z \end{cases}$  sono sghembe.

b- Si discuta se esiste un piano contenente la prima retta ed ortogonale alla seconda: nel caso se ne scriva l'equazione.

