

Ingegneria dell'energia, A.A. 2018/19
ALGEBRA LINEARE F. Acquistapace, V.M. Tortorelli
Quarto foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 Dato $\theta \in [0; +\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x, y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0, 0)$, del punto corrispondente al vettore (x, y) .

b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?

c- Si scriva la funzione da \mathbf{R}^2 in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

Domanda 2 Dato $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x, y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ x \sin \theta - y \cos \theta \end{pmatrix}$.

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x, y) , rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\frac{\theta}{2}$ radianti.

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u, v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.

b- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}) = \cos(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)})$, ovvero: $\frac{\langle f(u) \cdot f(v) \rangle}{\|f(u)\| \|f(v)\|} = \frac{\langle u \cdot v \rangle}{\|u\| \|v\|}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.

Il campo dei numeri complessi \mathbf{C} è: sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su \mathbf{C} stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su \mathbf{R} , di isomorfismo \mathbf{R} -lineare canonico con \mathbf{R}^2 dato da

$$c(x, y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione \mathbf{R} -lineare $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $cofoc^{-1} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ sia \mathbf{C} -lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

Domanda 4 a- Si provi che le funzioni $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$, sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x) \cdot f(y) \rangle = \langle x \cdot y \rangle$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Teorema: le isometrie di \mathbf{R}^n in sé che lasciano fissa l'origine di \mathbf{R}^n sono funzioni lineari:

b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di \mathbf{R}^2 che lasciano fisso $(0, 0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e 2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

Domanda 6 a- Dati $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \dots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da \mathbf{R}^m in \mathbf{R}^n , è lineare.

b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \dots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di \mathbf{R}^4 definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di \mathbf{R}^4 in sé che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

Domanda 7 (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da \mathbf{R}^3 in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ e $(10, 14, 18)$.

a- Si mostri che $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di \mathbf{R}^3 son indipendenti da $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2, 2, 1)$.

Domanda 8 Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $x - 2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f .

b- Considerando su $\mathbf{R}[x]_3$ la base canonica $1, x, x^2, x^3$ si scriva la matrice associata ad f .

c- Si trovino tutte le soluzioni $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ dell'equazione $f(v) = x^2 + x + 1$.

Domanda 9 Per quali valori dei parametri $s, t \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $f : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z, u, v) = (xs + y + z + u + vt, x + ys + z - tu + vx + y + zst + u + v)$$

a- è surgettiva?

b- l'immagine ha dimensione esattamente 2?

c- Se ne determini il nucleo nei vari casi.

Domanda 10 Si scriva la matrice associata alle seguenti funzioni lineari nelle basi rispettivamente specificate:

a- $T_c : \mathbf{R}[x]_5 \rightarrow \mathbf{R}[x]_5$, $c \in \mathbf{R}$, $(T(p))(x) = p(x + c)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$;

b- $D : \mathbf{R}[x]_5 \rightarrow \mathbf{R}[x]_5$, $(Dp)(x) = p'(x)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$;

Domanda 11 Si trovino tutte le applicazioni lineari da \mathbf{R}^4 in \mathbf{R}^3 surgettive e con nucleo eguale a $\mathbf{R}(1, 1, 1, 1)$.

Domanda 12 Si considerino in \mathbf{R}^3 i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x + y - z = 0$

$$\text{e } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

Domanda 13 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4 .

Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.

a- Dopo aver identificato V con \mathbf{R}^5 tramite una base di V , scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.

b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \rightarrow V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

Domanda 14 Denotando con ${}^t e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, {}^t e_n = (0, \dots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di \mathbf{R}^n , e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti

righe per colonne seguenti: $\begin{pmatrix} {}^t e_1 \\ \vdots \\ {}^t e_{i-1} \\ {}^t e_i + \mu {}^t e_j \\ {}^t e_{i+1} \\ \vdots \\ {}^t e_n \end{pmatrix} M,$ $\begin{pmatrix} \vdots \\ i^o {}^t e_j \\ \dots \\ j^o {}^t e_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$

Domanda 15 Costruire, nei vari casi, se possibile un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e si scriva la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:

a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}, n \geq 1$, per cui se $\text{rank} A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(\text{Id}_{n \times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_r^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di \mathbf{R}^n , base codominio 2;

b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \rightarrow \mathbf{R}[x]_{n-1}, n \geq 1, \mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m , per cui

$$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \dots + x^2 + 1) = x^{2k}, 0 \leq 2k \leq n,$$

$$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \dots + x, 1 \leq 2k-1 \leq n: \text{ basi di dominio e codominio quelle canoniche;}$$

c- $\phi : U \rightarrow U, U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 16 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici quadrate, della matrice nulla.

Domanda 17 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n \times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda \text{Id}_{n \times n} - A$ è invertibile.

Domanda 18 a- Dato uno spazio vettoriale U , mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.

b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y \rangle = \langle x \cdot {}^t Ay \rangle$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$:

Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di \mathbf{R}^n sono quelle per cui

$$P^2 - P = O_{n \times n} \text{ e } P = {}^t P.$$

Domanda 19 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ data da

$$M_A(B) = AB = (AB^1 | AB^2) \text{ ove } B^1, B^2 \text{ son la prima e seconda colonna di } B.$$

a- Si provi che M_A è lineare.

b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A .

Domanda 20 Sia $D : C^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}, k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a , se $k \neq 0, 1, D$ stesso se $k = 1$, e l'identità I su $C^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$

a- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r, \omega}$ il sottospazio di $C^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt} \cos \omega t, e^{rt} \sin \omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.

b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D , considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt} \cos \omega t, e^{rt} \sin \omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).

c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T , e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.

d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos, f'' + f = \cos$.

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. (simile all'es. 5.7 in M.Abate) Si considerino:

- l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(3, 2, 1, 0)$, $(-1, 2, -3, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$,
- l'applicazione lineare $S_a : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, $a \in \mathbf{R}$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(6, 4, 2, 0)$, $(a, 0, 4, a)$, $(0, 1, 2, 3)$.

1. a- Si calcolino le dimensioni delle immagini di T ed S_a .
2. b- Per quali valori del parametro a si ha $ImT = ImS_a$?
3. c- Si calcoli la dimensione dell'intersezione delle immagini di T ed S_a .

**Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame**

Esercizio 2. (cfr. M.Abate proposizione 5.11) Data una matrice $n \times m$ reale $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$ provare che:

1. per ogni $x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot {}^tMy \rangle_{\mathbf{R}^m},$

2. ponendo $\text{codom}M = \text{dom}{}^tM = \mathbf{R}^n$ e $\text{dom}M = \text{codom}{}^tM = \mathbf{R}^m$

$$\text{Im}M \oplus \text{Ker}{}^tM = \text{codom}M, \text{Ker}M \oplus \text{Im}{}^tM = \text{dom}M.$$

Esercizio 2. Seconda versione (cfr. M.Abate proposizione 5.11)

1. - Dati due spazi vettoriali U e V su \mathbf{K} , mostrare che l'insieme delle funzioni \mathbf{K} -lineari da U a V è chiuso per le operazioni di somma puntuale $(\phi + \psi)(u) =: \phi(u) +_V \psi(u), u \in U$, e prodotto per numero puntuale $(r\phi)(u) =: r \cdot_V \phi(u), u \in U, r \in \mathbf{K}$.
- Mostrare che l'insieme delle funzioni \mathbf{K} -lineari da U a V con tali operazioni è uno spazio vettoriale su \mathbf{K} , che si indica $\mathcal{L}(U, V)$.

2. Dimostrare che per ogni funzione lineare $\phi : \mathbf{R}^h \rightarrow \mathbf{R}$ esiste un unico $a_\phi \in \mathbf{R}^h$ per cui

$$\phi(x) = \langle x \cdot a \rangle_{\mathbf{R}^h}.$$

3. Indicando $\mathcal{L}(\mathbf{R}^h, \mathbf{R})$ con $(\mathbf{R}^h)'$, mostrare che la funzione $\mathcal{R} : (\mathbf{R}^h)' \rightarrow \mathbf{R}^h$ definita da $\mathcal{R}(\phi) = a_\phi$ è lineare e bigettiva.

Data quindi un'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, \text{dom}F = \mathbf{R}^m, \text{codom}F = \mathbf{R}^n$, si definisce l'applicazione lineare trasposta (relativamente ai prodotti scalari su dominio e codominio) la funzione tF

$${}^tF : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, \text{ tale che } \langle x \cdot {}^tFy \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle Fx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^m} \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$$

4. Provare che tF è ben definita e lineare.
5. Provare che la funzione $\tau : \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n), \tau(F) = {}^tF$ è lineare.
6. Provare che $\text{Im}F \oplus \text{Ker}{}^tF = \text{codom}F, \text{Ker}F \oplus \text{Im}{}^tF = \text{dom}F$

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. (E. Schlesinger Algebra Lineare e Geometria: capitolo 10 esercizio 101 pagina 231)
Date due matrici X $n \times k$ ed Y $k \times m$ si ricorda che $XY = (XY^1 | \dots | XY^m)$.

Sia $B \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ una matrice 2×2 che non sia multiplo dell'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$.

1. Provare che $C : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$, $C(A) = AB - BA$ è lineare.
2. Se $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la base canonica di \mathbf{R}^2 allora le matrici $e^i \otimes e^j$ (cfr. domanda 6b), $e^1 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^1 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono, nell'ordine, una base dello spazio $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici 2×2 .
Si calcolino $Be^i \otimes e^j$ ed $e^i \otimes e^j B$.
3. Si scriva la matrice 4×4 che rappresenta C nella base $e^i \otimes e^j$.
4. Si calcoli il rango di C .
5. Se ne deduca che $AB = BA \iff A \in \text{span}\{I, B\}$