Ingegneria dell'energia, A.A. 2018/19
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quinto foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 2 a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Provare le seguenti identità

b- $\det\begin{pmatrix} A_{h\times h} & B_{h\times(n-h)} \\ \mathrm{O}_{(n-h)\times h} & D_{(n-h)\times(n-h)} \end{pmatrix} = \det A\cdot\det D.$

c- $\det\begin{pmatrix} \boxed{A^1_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ \mathrm{O}_{h_2\times h_1} & \boxed{A^2_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O}_{h_k\times h_1} & \mathrm{O}_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^k_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix} = \det A^1\cdot\ldots\cdot\det A^k$, con $h_1+\cdots+h_k=n$.

Domanda 3 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a,\ b,\ c\in\mathbf{C}$.

b- Dati $a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z)=\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1,\dots,a_n\in\mathbf{C}$ qualsiasi, provare induttivamente che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i-a_j).$$

d- Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \dots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \cdots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \dots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \dots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \dots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

Domanda 4 Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

se la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U
allora
f è un multiplo dell'identità su U

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

Domanda 5 Sia M una matrice 3×3 che in una certa base di $\mathbf{R}^3$ rappresenta una rotazione per un angolo convesso attorno a qualche retta per l'origine. Calcolare l'ampiezza della rotazione in termini dei coefficienti di M.

Domanda 6 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui
$$A^2 - 4A + 3I = \mathrm{O}$$
ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A.

b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

Domanda 7 Dati due vettori $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ si indichi con $P(u, v)$ il parallelogramma di vertici: $0_{\mathbf{R}^2}$, u, v, $u + v$.
Identificando per colonne $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma", $A^o : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$:
$$A^o(u,v) = \begin{cases} \text{area di } P(u,v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ -\text{ area di } P(u,v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}.$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:
$A^o(Id_{2\times 2}) = 1$, $A^o(u + \lambda v, v) = A^o(u, v + \mu u) = A^o(u, v)$, $A^o(\lambda u, v) = A^o(u, \lambda v) = \lambda A^o(u, v)$.

b- Si mostri che A^o è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

d- Si mostri che $A^o(u, v) \;=\; \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

Domanda 8 Si identifichi per colonne $\mathcal{M}(n, n, K)$ con $K^n \times_{\,n\,\text{volte}} \times K^n$, e si denoti con $(e^1, \dots, e^n)$ la base canonica di K^n.
Una funzione $\Lambda : K^n \times_{\,n\,\text{volte}} \times K^n \to K$, $\Lambda(u^1, \dots, u^n)$ si dice:
- *multilineare* se fissati $n - 1$ argomenti è lineare nel rimanente.
- *alternante* se si annulla quando due argomenti sono linearmente dipendenti,
- normalizzata se $\Lambda(e^1, \dots, e^n) = 1$.

a- Se Λ è alternante normalizzata, e $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, $\sigma_i = \sigma(i)$, allora
$$\Lambda(e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_n}) \;=\; \text{segno} \prod_{i<j}(\sigma_i - \sigma_j) = \det(e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_n})$$
ovvero la parità del numero di scambi per riportare $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ in $(1, \dots, n)$.

b- Il determinante *è l'unica funzione* multilineare, alternante (rispetto le colonne viz. righe) e normalizzata.