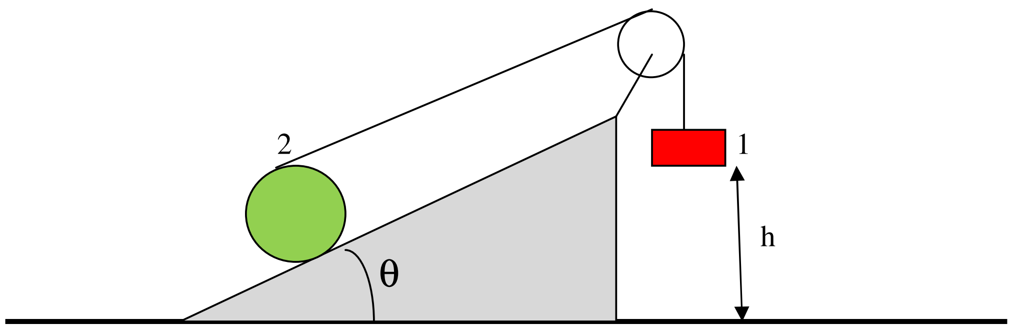
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, 10 Gennaio 2019

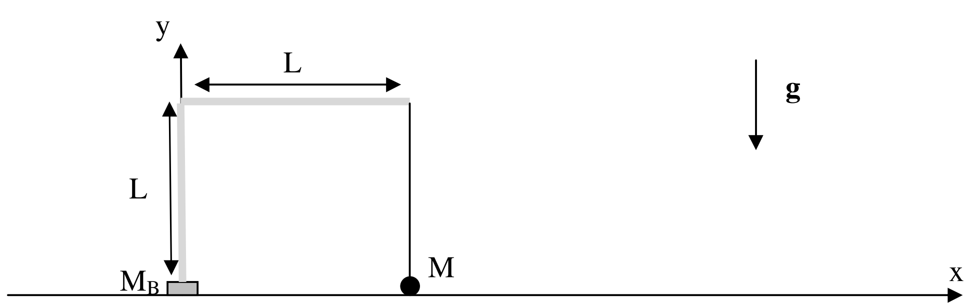
Esercizio 1 – Nel sistema di figura i corpi 1 e 2 (cilindro) hanno la stessa massa m = 2 kg, la fune è inestensibile e di massa trascurabile e la carrucola ha massa trascurabile. L'angolo del cuneo è θ = 30°. Il corpo 1 si trova inizialmente ad un altezza h = 2 m da terra ed è fermo. Al tempo t = 0 il sistema viene lasciato libero di muoversi. Sapendo che la fune NON scivola sul cilindro 2 di raggio r = 5 cm e che il cilindro compie un moto di rotolamento puro si trovi:



1.1 – la tensione T della fune.(6 punti)

1.2 – L'istante t in cui il corpo 1 arriva a terra. (4 punti)

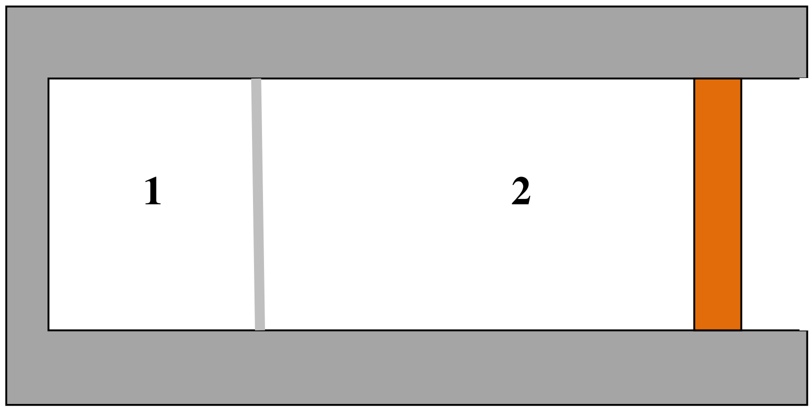
Esercizio 2 – Per semplicità di calcolo si schematizza una gru come un braccio verticale omogeneo di massa m = 1000 kg e lunghezza L=50 m ed un braccio orizzontale di ugual massa e lunghezza disposti come in figura. La base della gru è quadrata e centrata rispetto all'origine degli assi, ha lato lato h = 4 m ed ha massa M_B=10^5 Kg. Supponendo che un carico di massa M venga sollevato all'estremo del braccio orizzontale come mostrato in figura,



2.1 – si dica quale è il massimo valore M_o della massa M che può essere sollevata senza che la gru si ribalti, (4 punti)

2.2 - si trovi il valore della reazione totale ***R*** esercitata dal terreno sulla gru e a che distanza x dal centro della base è applicata la reazione quando M =M_0 e il carico di massa M è sollevato dal terreno. (6 punti)

Esercizio 3 – Un contenitore cilindrico orizzontale è suddiviso da un setto rigido fissato alle pareti in due parti 1 e 2 aventi volumi iniziali $V_1 = V_0 = 1$ litro e $V_2 = 3\ V_0$. All'interno di ciascuna parte si trova un gas ideale monoatomico con numero di moli, rispettivamente, $n_1 = n_0 = 0.05$ moli e $n_2 = 2\ n_0$ entrambe a temperatura $T_0 = 300$ K. Tutte le pareti e il setto rigido sono adiabatiche. Ad un dato istante il gas 2 viene compresso in modo reversibile e, quando il lavoro fatto dall'operatore è $L_0 = 400$ J, il setto si rompe. Si calcoli



3.1 – la pressione del gas 2 all'istante immediatamente precedente alla rottura del setto rigido (6 punti);

3.2- le temperature finali raggiunte dai due gas dopo che il setto si è rotto e il sistema ha raggiunto l'equilibrio (4 punti).

Si utilizzi per i calcoli il valore $R = 8.316$ J/ (mole K) della costante dei gas perfetti.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1 - 1.1- Le equazioni del moto del corpo 1 e del corpo 2 sono

$$mg - T = ma \quad (1)$$

$$T - mg \sin\theta - F_s = m\, a_c \quad (2)$$

$$(T + F_s)\, r = m\, r^2\, \alpha /2 \qquad \text{cioè} \quad T + F_s = m\, a_c/2 \quad (3)$$

dove abbiamo assunto che la forza di attrito F_s sia in verso opposto al moto e abbiamo indicato con a l'accelerazione del corpo 1 e con a_c l'accelerazione del centro del cilindro. L'ultima espressione della (3) è stata ottenuta imponendo la condizione di rotolamento puro $\alpha = a_c /r$. D'altra parte, poiché la corda è inestensibile e non scivola sul cilindro e il moto del cilindro è di rotolamento puro, si deduce immediatamente che $a_c = a/2$. Utilizzando quest'ultima relazione, le equazioni (2) e (3) divengono

$$T - mg \sin\theta - F_s = m\, a /2 \quad (4)$$

$$T + F_s = m\, a /4 \quad (5)$$

Il sistema (1), (4) e (5) è un sistema lineare nelle tre incognite T, a , F_s che ha come soluzione:

$$a = (8\, g - 4g \sin\theta)/11 = 6\, g /11 = 5{,}35 \text{ m/s}^2 \quad (6)$$
$$T = (3\, mg + 4\, mg \sin\theta)/11 = 5\, m\, g /11 = 8.90 \text{ N} \quad (7)$$
$$F_s = - (mg + 5\, mg \sin\theta)/11 = - 7\, m\, g /22 = - 6.24 \text{ N} \quad (8)$$

Il segno – nella forza di attrito statico indica che essa è diretta nel verso del moto contrariamente a quanto da noi assunto in precedenza nello scrivere le relazioni (2) e (3)..

1.2- dalla (6) si deduce che il moto del corpo 1 è uniformemente accelerato e, quindi, la coordinata verticale varia secondo la legge

$$y(t) = h - a\, t^2/2 \quad (9)$$

Imponendo che il corpo tocchi terra, cioè $y(t) = 0$, si ottiene

$$t = (2\, h/a)^{1/2} = 0.865 \text{ s} \quad (10)$$

Soluzione Es. 2 - 2.1 – La gru non si ribalta finché la coordinata x del centro di massa del sistema è compresa nell'area di base cioè x giace nell'intervallo [- $h/2$, $h/2$]. Dunque, quando il carico di massa M si solleva da terra, deve essere verificata la condizione

$$(mL/2 + ML)/(2\, m + M_B + M) \leq h/2 \quad (1)$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per $(2\, m + M_B + M)$ e raccogliendo i contributi proporzionali all'incognita M, la (1) può essere riscritta nella forma equivalente

$$M \leq (m\, h - m\, L/2 + M_B\, h/2) /(L - h/2) = M_0 = 3729 \text{ Kg} \quad (2)$$

2.2 - Per $M = M_0$ il sistema deve essere ancora in equilibrio e, quindi,la forza totale e il momento di forza rispetto al punto (0,0,0) al centro della base devono essere entrambi nulli. Dunque, quando la massa M è sollevata da terra, la forza totale agente sul sistema è

$$R - M_B\, g - 2\, mg - M_0\, g = 0 \text{ , cioè, } \quad R = (2\, m + M_0 + M_B)\, g = 1.04\ 10^6 \text{ N} \qquad (3)$$

dove R è la reazione normale del pavimento che è diretta perpendicolarmente al pavimento dal basso verso l'alto. Indicando con x la posizione lungo x in cui è applicata la reazione risultante, il momento di forza rispetto all'origine O è

$$M_0\, g\, L + m\, g\, L/2 - R\, x = 0 \qquad (4)$$

Dunque, sostituendo nella (4) il valore di R dato dalla (3) si trova:

$$x = (M_0\, L + m\, L/2)/\ (2\, m + M_0 + M_B) = h/2 = 2 \text{ m} \qquad (5)$$

Il risultato $x = h/2$ in eq.(5) si ottiene sostituendo nella (5) il valore di M_0 dato nella (2) e svolgendo alcuni semplici passaggi.

Soluzione Es. 3 - 3.1 – Poiché le pareti sono tutte adiabatiche la trasformazione del gas 2 è una adiabatica reversibile. La pressione iniziale del gas 2 si ottiene dalla legge dei gas perfetti ed è pari a

$$p_0 = 2\, n_0\, R\, T_0/(3\, V_0) = 0.832\ 10^{5} \text{ Pa} \qquad (1)$$

Poiché la compressione avviene in modo reversibile, la pressione finale deve soddisfare l'equazione dell'adiabatica reversibile

$$p_f\, V_f^{\beta} = p_0\, (3V_0)^{\beta} \qquad (2)$$

dove $\beta = 5/3$ per un gas monoatomico. L'equazione (2) ha due incognite p_f e V_f e, quindi, si deve scrivere un'ulteriore equazione. Poiché il sistema è adiabatico, il lavoro fatto dall'operatore deve essere uguale alla variazione dell'energia interna del gas 2, cioè

$$L_0 = \Delta U = 3\, (p_f\, V_f - 3\, p_0\, V_0)\ /2 \qquad (3)$$

La (2) e la (3) costituiscono un sistema di equazioni nelle incognite p_f e V_f . Dalla (2) si ricava il valore del volume finale in funzione della pressione finale che è dato dall'espressione:

$$V_f = p_0^{1/\beta}\ 3\ V_0\ /\ p_f^{1/\beta} \qquad (2')$$

Sostituendo questa espressione nella (3) e svolgendo i calcoli si trova la pressione finale

$$P_f = [\ 2\, L_0\ /\ (9\, p_0^{1/\beta}\, V_0) + p_0^{(\beta-1)/\beta}]^{\ \beta/(\beta-1)} = 5.12\ 10^5 \text{ Pa} \qquad (4)$$

3.2 – Poiché il pistone è fermo e il setto è immobile, il lavoro fatto sul sistema dopo la rottura del setto è nullo ed anche il calore assorbito è nullo. Ne consegue che l'energia finale del sistema di gas è uguale a quella che aveva il sistema all'istante immediatamente precedente alla rottura del setto. Inizialmente i due gas 1 e 2 avevano, rispettivamente, le energie $3\ n_0RT_0/2$ e $3\ n_0RT_0$. Alla fine della compressione il gas 1 ha la stessa energia (il gas non fa lavoro e non assorbe calore essendo il setto fisso ed adiabatico), mentre il gas 1 ha la nuova energia 3 n_0RT_0 + ΔU = 3 n_0RT_0 + L_0 (vedi la relazione (3)). Dunque, l'energia totale dei gas immediatamente prima della rottura del setto è

$$U_i = 9\, n_0RT_0/2 \; + \; L_0 \qquad (5)$$

Mentre alla fine i due gas si trovano alla stessa temperatura finale T_f e, quindi, l'energia totale è

$$U_f = 9\, n_0RT_f/2 \qquad (6)$$

Poiché l'energia si deve conservare dopo la rottura del setto ($U_f = Ui$), si deduce che la temperatura finale dei due gas è

$$T_f = T_0 + \frac{2\,L_0}{9\,n_0R} = 514 \text{ K} \qquad (7)$$