Calcolo Numerico - Corso B: Laboratorio Lezione 2

Luca Gemignani <luca.gemignani@unipi.it>

6 Marzo 2019

1 Risoluzione di Sistemi Triangolari

Sia $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice *triangolare superiore*, i.e., $t_{i,j} = 0$ se $i > j$.

Esercizio 1. Si mostri che $T - t_{jj}I$, $1 \leq j \leq n$, è singolare. Si deduca che T ha autovalori $\lambda_j = t_{j,j}$, $1 \leq j \leq n$, da cui T è invertibile se e solo se $t_{j,j} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$.

Assumiamo dunque T invertibile e calcoliamo la soluzione del sistema lineare $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con il metodo di sostituzione all'indietro. Dall'ultima equazione si ottiene

$$t_{n,n}x_n = b_n \iff x_n = \frac{b_n}{t_{n,n}}.$$

Una volta calcolate $x_n, \ldots, x_{k+1}$ dalla $k-$esima equazione si ricava

$$\sum_{j=k}^{n} t_{k,j}x_j = b_k \rightarrow x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} t_{k,j}x_j}{t_{k,k}}.$$

Il seguente programma MatLab implementa questo metodo

```
function [x] = solve_tri_up(t,b)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
x(n)=b(n)/t(n,n);
for k=n-1:-1:1
    s=0;
     for j=k+1:n
         s=s+t(k,j)*x(j);
     end
     x(k)=(b(k)-s)/t(k,k);
end
end
```

Esercizio 2. Determinare il costo computazionale del metodo di sostituzione all'indietro.

Esercizio 3. Sia T triangolare superiore con $t_{i,i} > 0$, $1 \leq i \leq n$, e $t_{i,j} \leq 0$ per $i < j \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$. Si dimostri che $T^{-1} \geq 0$.

Siano T e $\boldsymbol{b}$ definite come segue

```
>> t=eye(128);
>> for k=1:127; t(k, k+1)=-2; end;
>> x=rand(128,1);
>> b=t*x;
>> x1=solve_tri_up(t,b);
```

allora otteniamo

```
>> max(abs(x-x1))

ans =

    2.997595950460717e+20

>>
```

e quindi ci siamo giocati tutta la precisione di calcolo.

Esercizio 4. Determinare il costo computazionale del metodo di sostituzione all'indietro per la matrice T definita come sopra.

Per spiegare questa perdita di accuratezza osserviamo che

```
>> t=eye(128);
>> for k=1:127; t(k, k+1)=-2; end;
>> b=ones(128,1);
>> x=solve_tri_up(t,b);
>> max(x)

ans =

    3.402823669209385e+38

>>
```

e quindi nell'inversa sono presenti elementi di modulo maggiore di $ans/n = ans/128 \simeq 10^{36}$. Per confermare che questa proprietà incide sull'accuratezza del calcolo osserviamo che

```
   >> alpha=linspace(0,2, 5); for n=1:5; t=eye(128);
   for k=1:127; t(k, k+1)=-alpha(n); end;
x=rand(128,1);b=t*x;x1=solve_tri_up(t,b);disp(max(abs(x-x1))); end;
    0
```

```
    1.110223024625157e-16

    0

    7.120206705528129e+05

    9.444737468790284e+21

    >>
```

e parallelamente

```
    >> alpha=linspace(0,2, 5); for n=1:5; t=eye(128);
    for k=1:127; t(k, k+1)=-alpha(n); end;
b=ones(128,1);x=solve_tri_up(t,b);disp(max(x)); end;
    1

    2

   128

    6.929647683141880e+22

    3.402823669209385e+38
```

Esercizio 5. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$ si dice predominante diagonale se

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sia T triangolare superiore predominante dioagonale con $t_{i,i} > 0$, $1 \leq i \leq n$, e $t_{i,j} \leq 0$ per $i < j \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$. Si mostri che

$$\max_{1\leq i,j\leq n} (T^{-1})_{i,j} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{t_{i,i}}.$$