Efflussi adiabatici

Efflusso adiabatico

- Se differenziamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p = \rho RT \quad \Rightarrow \quad dp = RTd\rho + \rho RdT$$

- Dividendo per p: $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{RTd\rho}{p} + \dfrac{\rho RdT}{p} = \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dT}{T}$
- Con l'ipotesi di una trasformazione adiabatica:

$$p = C\rho^k \quad \Rightarrow \quad dp = C\rho^{k-1}d\rho \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p} = k\frac{d\rho}{\rho}$$

Efflusso adiabatico

- Dall'equazione di continuità:

$$\rho Ac = \text{cost} \Rightarrow \rho Adc + Acd\rho + \rho cdA = 0 \Rightarrow \frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0$$

- Combinando con l'equazione di stato:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \\ &\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$$

- In un condotto fisso: $cdc = -\dfrac{dp}{\rho} = -dh$

Efflussi adiabatici

- Considieriamo un condotto a sezione costante

$$\frac{dc}{c}+\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dA}{A}=0 \Rightarrow -\frac{dc}{c}=\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow -cdc=c^2\frac{d\rho}{\rho}$$

- Combinando con:

$$-cdc=\frac{dp}{\rho} \Rightarrow \frac{dp}{\rho}=c^2\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow c=c^*=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

- Che è chiamata velocità caratteristica adiabatica ed è la velocità con la quale si propagano le perturbazioni in un fluido.
- Infatti data la definizione di modulo di elasticità:

$$E=-v\frac{dp}{dv}=\rho\frac{dp}{d\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho}=\frac{dp}{d\rho} \Rightarrow c^*=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Efflussi adiabatici

- Per i gas perfetti:

$$c^* = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

- Il rapporto tra la velocità e la velocità caratteristica adiabatica è chiamato numero di Mach

$$Ma = \frac{c^*}{c}$$

Grandezze di ristagno

- Vediamo come si possono scrivere la temperatura di ristagno considerando il numero di Mach:

$$h_0 = \mathrm{h} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{c^2}{2} \Rightarrow T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p}$$

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p} = T + \frac{\frac{R}{c_v}}{\frac{R}{c_v}c_p}\frac{c^2}{2} = T + \frac{k-1}{kR}\frac{c^2}{2} =$$

$$= T\left(1 + \frac{k-1}{kRT}\frac{c^2}{2}\right) = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{c^2}{c^{*2}}\right) = T\left(1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right)$$

Grandezze di ristagno

- Per quanto riguarda la pressione:

$$p_0 = \mathrm{p} + \rho \frac{c^2}{2} \Rightarrow pT^{\frac{k-1}{k}} = \mathrm{cost} \Rightarrow p_0 = p\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = p\left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Equazioni di Hugoniot

- Considieriamo le equazioni cardinali:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dA}{A} + \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dc}{c} = 0 \\
\dfrac{dp}{p} = k\dfrac{d\rho}{\rho} \Rightarrow dp = \dfrac{kp}{\rho}d\rho = kRTd\rho = c^{*2}d\rho \\
cdc = -\dfrac{dp}{\rho}
\end{cases}
$$

Equazioni di Hugoniot

- Combinando le equazioni della trasformazione adiabatica e quella dell'energia:

$$\left.\begin{aligned} dp &= c^{*2} d\rho \\ cdc &= -\frac{dp}{\rho} \end{aligned}\right\} cdc = -c^{*2}\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{c}{c^{*2}}dc$$

- Sostituendo nell'equazione di continuità:

Equazioni di Hugoniot

- Si ottiene la prima equazione di Hugoniot:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA}{A}+\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dc}{c}=0 \\ &\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{c}{c^{*2}}dc \end{aligned}\right\}\frac{dA}{A}+-\frac{c}{c^{*2}}dc+\frac{dc}{c}=0\Rightarrow\frac{dA}{A}=\frac{dc}{c}\left(\frac{c^2}{c^{*2}}-1\right)$$

$$\frac{dA}{A}=\frac{dc}{c}\left(Ma^2-1\right)$$

Equazioni di Hugoniot

- Consideriamo le seguenti due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} cdc &= -c^{*2}\frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dp}{p} &= k\frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}\right\} \Rightarrow cdc = -c^{*2}\frac{dp}{kp} \Rightarrow \frac{dc}{c} = -\frac{1}{kMa^2}\frac{dp}{p}$$

- Sostituendo nella prima eq. di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dc}{c}\left(Ma^2 - 1\right) = \frac{dp}{p}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{Ma^2} - 1\right)$$

Equazioni di Hugoniot

- Utilizzando l'equazione dell'energia in forma termodinamica:

$$dh = -cdc \Rightarrow c_p dT = \frac{kR}{k-1} dT = -cdc$$

$$\frac{kR}{k-1} \frac{dT}{kRT} = -\frac{cdc}{kRT} \Rightarrow \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} = -\frac{c^2}{c^{*2}} \frac{dc}{c}$$

$$\frac{dT}{T} = -(k-1) Ma^2 \frac{dc}{c}$$

- Che è la terza equazione di Hugoniot

Condotti a sezione variabile

- Osservando la prima equazione di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dc}{c}\left(Ma^2 - 1\right)$$

- Si osserva:
- Se Ma<1 un condotto convergente accelera il fluido e uno divergente lo decelera
- Se Ma>1 un condotto convergente decelera il fluido e uno divergente lo accelera
- Se Ma=1 l’equazione è indeterminata

Velocità di efflusso

- Vediamo cosa succede quando un flusso di gas passa da un ambiente nelle condizioni di ristagno 01 alle condizioni 2:

$$.-c\,dc = c_p dT \Rightarrow -\int_c^0 c\,dc = \int_{T_2}^{T_{01}} c_p\,dT \Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{2} = \frac{kR}{k-1}\left(T_{01} - T_2\right) = \frac{kRT_{01}}{k-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_{01}}\right) \Rightarrow$$

$$c^2 = c_{01}^{*2}\sqrt{\frac{2}{k-1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

Velocità di efflusso

- Se cerchiamo le condizioni di p_2 per cui si raggiungono le condizioni di velocità del suono, otteniamo la velocità critica:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{kR}{k-1}\left(T_{01} - T_2\right) = \frac{c_{01}^2}{k-1} - \frac{c^{*2}}{k-1} \Rightarrow$$

$$\frac{c^{*2}}{2} = \frac{c_{01}^2}{k-1} - \frac{c^{*2}}{k-1} \Rightarrow c^{*2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k-1}\right) = \frac{c_{01}^2}{k-1} \Rightarrow$$

$$c^* = c_{01}\sqrt{\frac{2}{k+1}}$$

Velocità di efflusso

- Se sostituiamo le velocità con l'espressione della velocità del suono:

$$c^* = \sqrt{kRT} \Rightarrow T_{cr} = T^* = T_0 \frac{2}{k+1}$$

$$p_{cr} = p_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

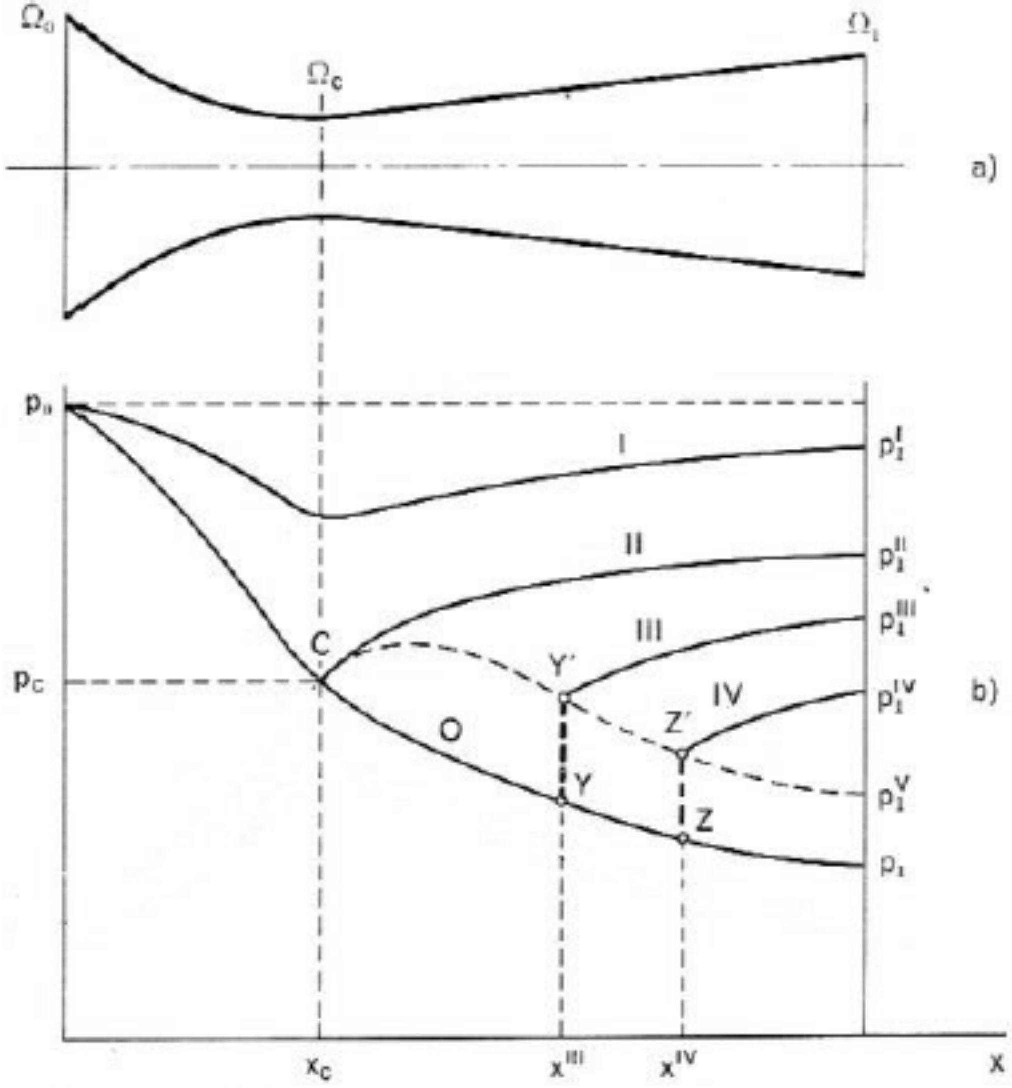
$$\rho_{cr} = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Portata di un ugello

- La portata effluente è data da:

$$\left.\begin{aligned} m &= \rho A c \\ c_2 &= c_{01}^{*}\sqrt{\frac{2}{k-1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} \\ \rho_2 &= \rho_{01}\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}\right\} m = A\rho_{01}c_{01}^{*}\sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)}$$

Ugello convergente divergente



Regolazione della portata nelle turbine

- Se abbiamo un ugello in cui la pressione evolve dalla pressione p_0 alla pressione $p_1<p_0$ la portata segue l'espressione:

$$m = A\rho_0 c_0^* \sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)}$$

- Che ha un andamento ellittico rispetto al rapporto di espansione

Regolazione della portata nelle turbine

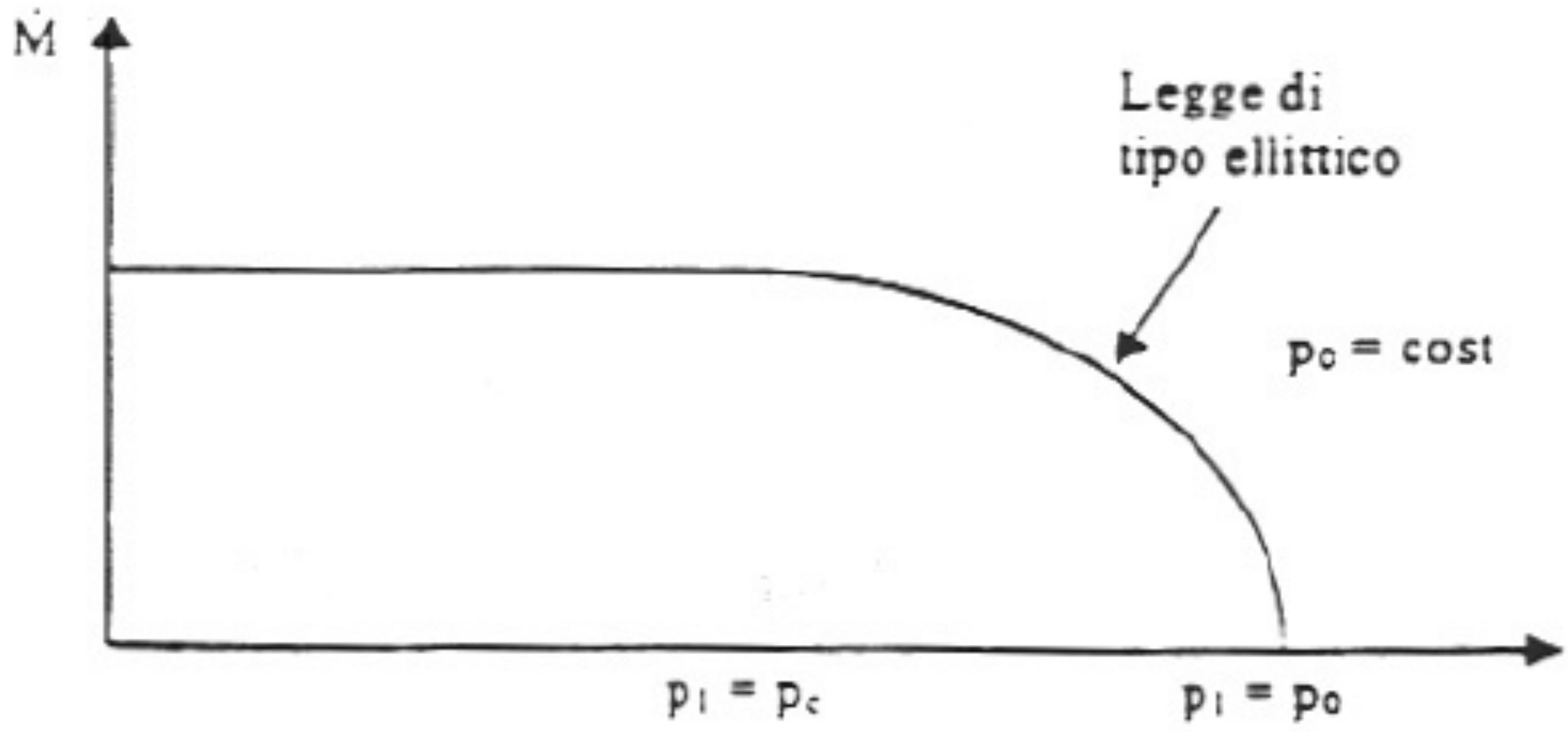
- Quando il rapporto di espansione raggiunge il valore critico:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

- Si raggiunge la velocità del suono e la portata non può più variare.

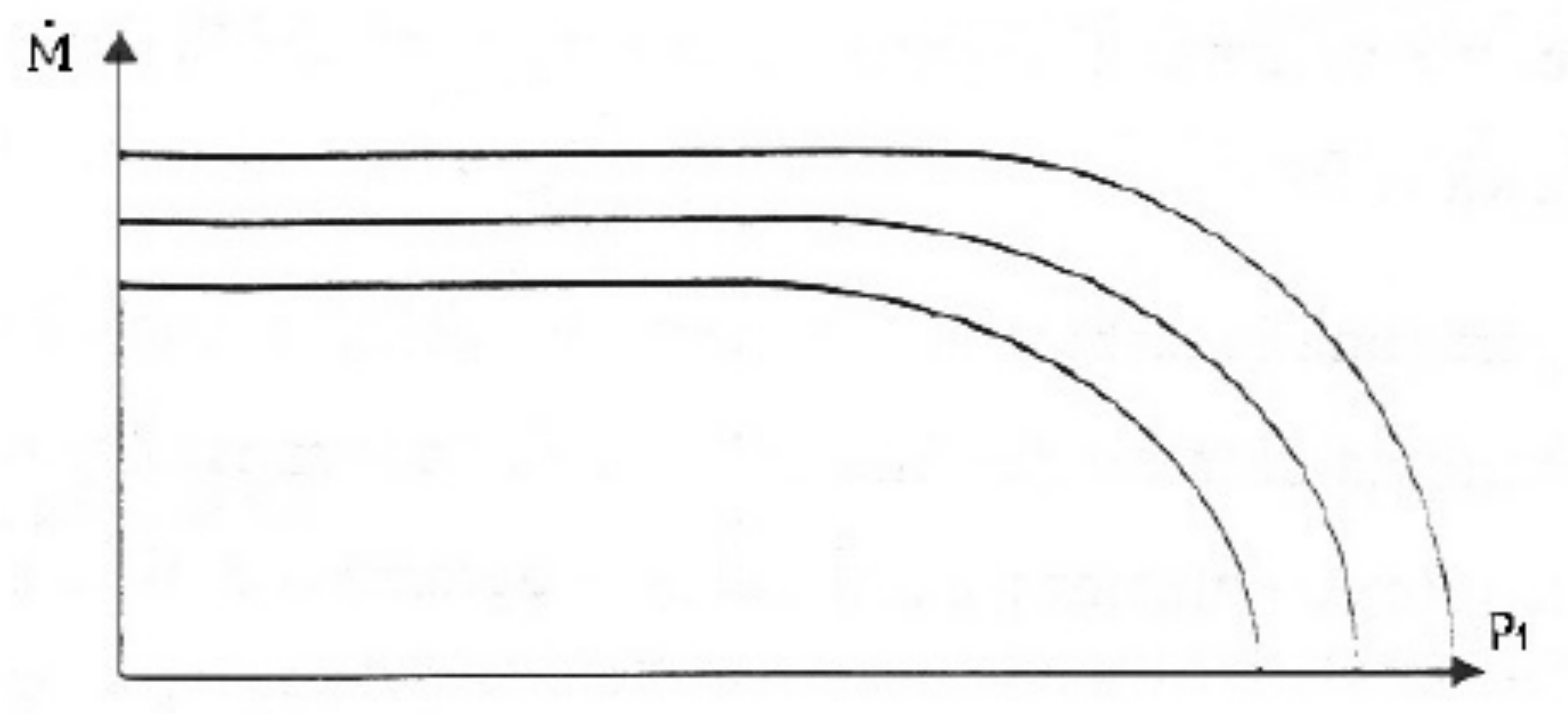
Regolazione della portata nelle turbine

- SI ha quindi una curva in parte ellittica e in parte lineare:

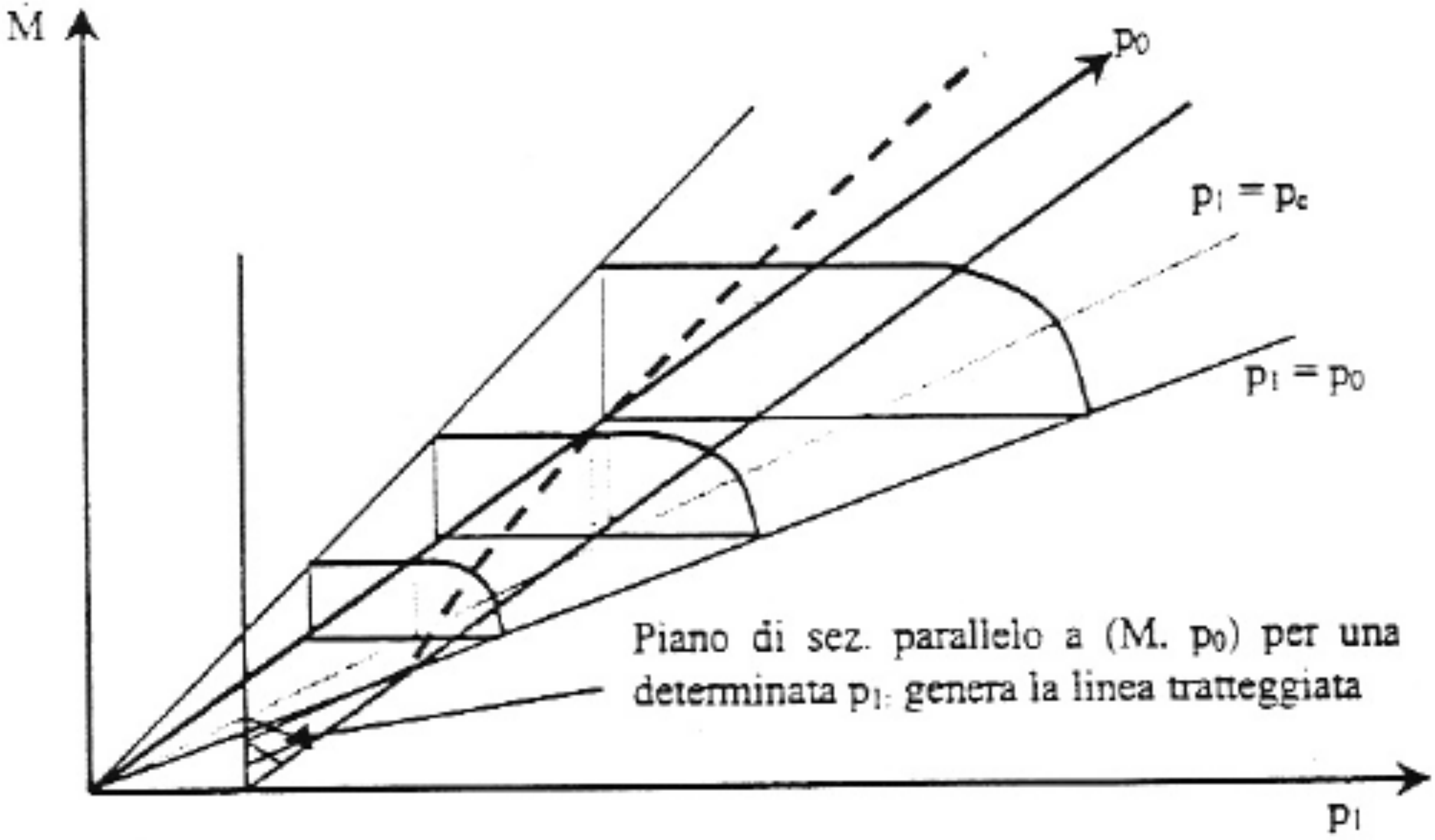


Regolazione della portata nelle turbine

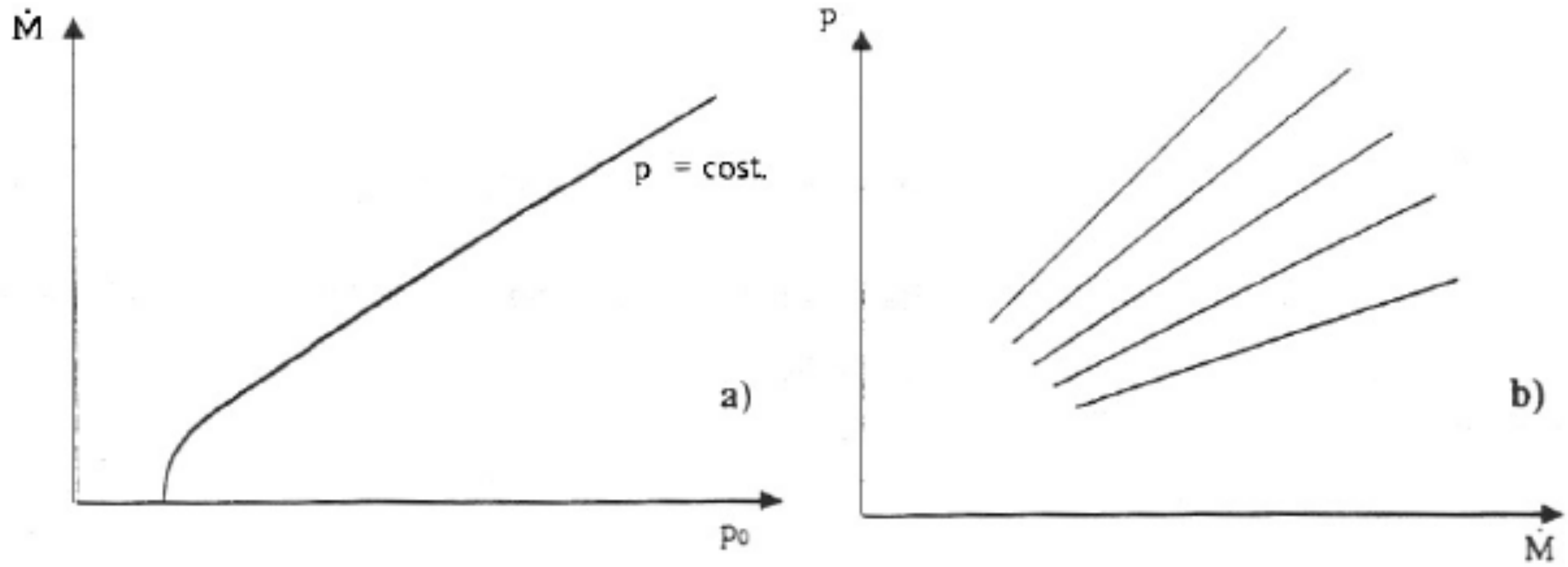
- Se varia la pressione a monte otteniamo questa famiglia di curve:



Cono di Stodola



Cono di Stodola



Regolazione delle turbine