**Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20**
**ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli**
**Settimo foglio di esercizi: lemma di Fitting**

**1.1)** sia $g : V \to W$ lineare, se $V = Ker\, g \oplus R$ allora: $g : R \leftrightarrow Im\, g$.

*Dimostrazione:* - surgettività: $w \in Im\, g \subseteq W$ è equivalente a $w = g(u)$ per qualche $v \in V$. Si tratta di provare che ve n'è uno in $R$. Per ipotesi vi sono $k \in Ker\, g$ ed $R \in R$ per cui $u = k + r$, quindi, per linearità $g(v) = g(k + r) = g(k) + g(r) = g(r)$.
- Iniettività: se $g(r) = 0_W$, $r \in R$ si ha $r \in R \cap Ker\, g = (0_V)$ per definizione di somma diretta.

**1.2)** siano $V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$ lineari, allora: $dim\, Ker\, g \le dim\, Ker\, f_o g \le dim\, Ker\, g + dim\, Ker\, f$

*Dimostrazione:* la prima diseguaglianze segue da $Ker\, g \subset Ker\, f$.
Per la seconda: - visto che $Ker\, g$ è un sottospazio di $Ker\, f_o g$, completando una base del primo a base del secondo si ha $Ker\, f_o g = Ker\, g \oplus R$ ove $R$ è il sottospazio generato dagli elementi aggiunti alla base di $Ker\, g$.
- Essendo $R$ contenuto in $Ker\, f_o g$ si ha che $g : R \to Ker\, f$, e per 1.1 che è iniettiva. Quindi $dim\, R \le dim\, Ker\, f$.
- Per somma diretta $dim\, Ker\, f_o g = dim\, Ker\, g + dim\, R \le dim\, Ker\, g + dim\, Ker\, f$.

**Corollario** se $f : V \to V$ è lineare, $m \in \mathbf{N}$, $m \ge 1$, si ha $dim\, Ker\, f \le dim\, Ker\, f^m \le m{\cdot}dim\, Ker\, f$

*Dimostrazione:* la prima diseguaglianza si per l'inclusione diei sottospazi: $Ker\, f \subset Ker\, f^m$, $m \ge 1$. La seconda si prova per induzione su $m \ge 1$: la base induttiva immediata. Quindi applicando 1.2 con $f = g$, $f^{m-1} = f$ e $V = U = W$ si ha:
$dim\, Ker\, f^m = dim\, Ker\, f^{m-1}{}_o f \le dim\, Ker\, f^{m-1} + dim\, Ker\, f$, e per ipotesi induttiva si conclude.

**2.1)** $V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$ lineari: -i $Im\, g \cap Kerf = gKer\, f_o g$,
-ii se poi $V = U = W$ e $g$ è invertibile $gKerf = Ker\, g_o f_o g^{-1}$.

*Dimostrazione:* -i se $u \in Im\, g \cap Ker\, f$, da una parte $u = g(v)$ per qualche $v \in V$, dall'altra $f(u) = 0_W$. Cioè $f(g(v)) = 0_W$, cioè $v \in Ker\, f_o g$. Viceversa se $f(g(u)) = 0$ si ha $g(u) \in Img \cap Kerf$.
-ii Si osserva che, essendo $g$ bigettiva, $Ker\, g_o f_o g^{-1} = Ker\, f_o g^{-1}$. Per -i e bigettività di $g$ e $g^{-1}$:
$$gKerf = g(Img^{-1} \cap Kerf) = Ker\, f_o g^{-1} = Ker\, g_o f_o g^{-1}.$$

**2.2)** siano $V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$ lineari, allora:
$$Ker\, g = Ker\, f_o g \Leftrightarrow Im\, g \cap Ker\, f = (0_U) \Leftrightarrow f : Im\, g \leftrightarrow Im\, f_o g.$$

*Dimostrazione:* la prima equivalenza segue dall'ipotesi e da 2.1)-i.
- Seconda equivalenza $\Rightarrow$): per definizione di immagine $f : Im\, g \to Im\, f_o g$ è surgettiva. D'altronde se $f(g(v)) = 0_W$ si avrebbe $g(v) \in Im\, g \cap Ker\, f$ e quindi $g(v) = 0_U$.
$\Leftarrow$): per iniettività di $f$ *su* $Im\, g$ se $f(g(v)) = 0_W$ deve essere $g(v) = 0_U$, cioè $Ker\, f_o g \subset Kerg$.

**Corollario, lemma di Fitting 1** se $f : V \to V$ è lineare, $m, k \in \mathbf{N}$, $m, k \ge 1$, si ha

$$Ker\, f^m = Ker\, f^{m+1} \Leftrightarrow Ker\, f^m = Ker\, f^{m+k} \Leftrightarrow Im\, f^m \cap Ker\, f = (0_V) \Leftrightarrow Im\, f^m \cap Ker\, f^k = (0)$$
$$\Leftrightarrow f : Im\, f^m \leftrightarrow Im\, f^{m+1}$$

*Dimostrazione:* - prima equivalenza: $\Leftarrow$) è immediata. $\Rightarrow$) se $k \ge 1$ basta mostrare $Ker\, f^{m+k} \subset Ker\, f^m$. Induzione su $k$: per $k = 1$ è l'ipotesi. Passo induttivo: se $f^{m+k}(v) = 0$, *i.e.* $f^{m+1}(f^{k-1}(v)) = 0$, per ipotesi anche $f^{m+k-1}(v) = f^m(f^{k-1}(v)) = 0$, e per ipotesi induttiva $f^m(v) = 0$.
- La seconda e la quarta equivalenze sono 2.2 con $g = f^m$, $f = f$, $V = U = W$.
- Per la terza da 2.1-i $Im\, f^m \cap Ker\, f^k = f^m Ker\, f^{m+k}$ che è nullo se e solo se $Ker\, f^{m+k} \subset Ker\, f^m$.

**Corollario, lemma di Fitting 2: splitting** se inoltre $V$ ha dimensione *finita* si ha anche
$Ker\, f^m = Ker\, f^{m+1} \Leftrightarrow Im\, f^m = Imf^{m+1} \Leftrightarrow V = Kerf^m \oplus Imf^m \Leftrightarrow f : Imf^m \leftrightarrow Imf^m$.

*Dimostrazione:* si usa il teorema della dimensione e il fatto che $Im\, f^{m+1} \subset Im\, f^m$.