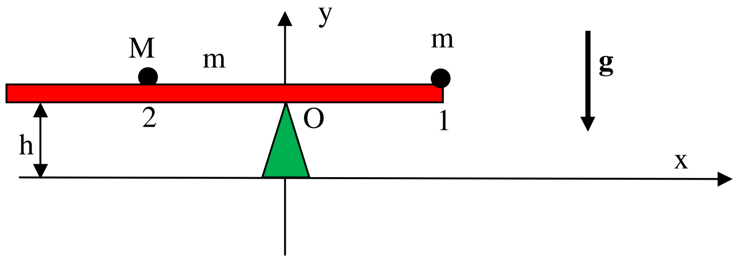
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE 6 giugno 2019

Esercizio 1 – Una barra di massa m = 2 Kg e lunghezza L = 2 m è appoggiata su un cuneo come mostrato in figura. Due piccoli corpi 1 e 2, di massa rispettivamente pari ad m = 2 Kg e M sono fissati sulla sbarra in posizioni simmetriche rispetto ad O e a distanza $L/3$ da O come mostrato in figura. La sbarra si trova inizialmente ferma nella posizione orizzontale mostrata in figura con l'estremo a sinistra a distanza $d = 2L/3$ dal punto O di contatto fra sbarra e cuneo e ad altezza $h = L/6$ dal suolo. In queste condizioni, si osserva il sistema resta in equilibrio.

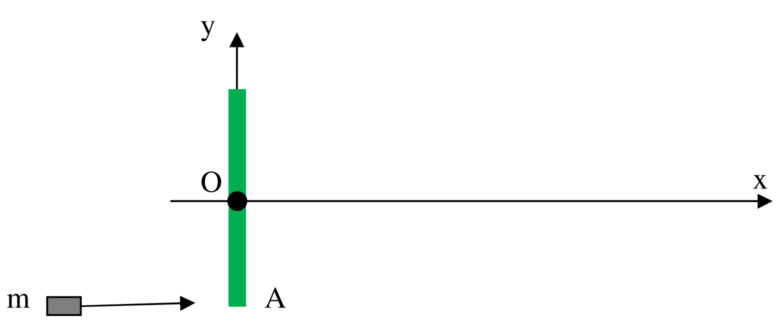


1.1 – Si trovi il valore della massa M e la reazione $\boldsymbol{R}$ (componenti x ed y) esercitata dal cuneo sulla barra. (4 punti)

Al tempo t = 0 il corpo di massa M viene rimosso e la sbarra viene lasciata libera di ruotare. Si supponga che durante l'intero moto successivo la barra non scivoli rispetto al cuneo.

1.2 – Si trovi il verso di rotazione della barra (orario o antiorario) e la velocità angolare massima raggiunta dalla barra nel moto successivo. (6 punti)

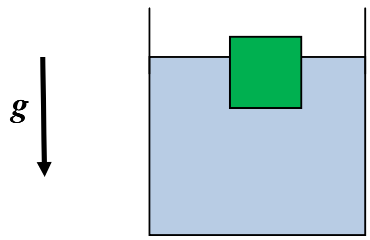
Esercizio 2- Un'asta di massa M = 2 Kg e lunghezza L = 2 m è appoggiata su un piano orizzontale xOy ed è libera di ruotare attorno ad un asse verticale passante per O al centro dell'asta. Tutti gli attriti sono trascurabili. Un proiettile di massa m = 100 g si muove a velocità v_0 = 20 m/s parallelamente all'asse x nel verso positivo ed urta l'asta nell'estremo A dove si conficca.



2.1 – Si trovi la minima velocità angolare raggiunta dall'asta nel moto successivo all'urto. (6 punti)

2.2- Si trovino le componenti I_x e I_y dell'impulso della forza esercitata dall'asse passante per O durante l'intero urto. (5 punti)

Esercizio 3 – Una vaschetta cilindrica ha superficie di base $S = 10^{-2}$ m^2 e contiene un certo volume di acqua. Un cubetto di legno di massa m = 500 g galleggia sulla superficie dell'acqua con l'80% di volume sommerso. Un corpo di massa M viene appoggiato sul cubetto di legno e si osserva che, all'equilibrio il volume sommerso del legno diventa pari al 90%.



3.1 – Si trovi la massa M del corpo. (5 punti)

3.2 – Si dica di quanto aumenta la pressione sul fondo del recipiente all'equilibrio dopo che il corpo è stato appoggiato sul cubo di legno. (4 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Es. 1- **1.1**- Perché il sistema costituito dai corpi di massa m e M e della barra sia in equilibrio deve essere nulla la forza totale esterna agente su di esso e il momento di forza rispetto al punto di contatto O. La forza totale esterna è data dalla somma della reazione $\boldsymbol{R}$ del cuneo applicata in O e della forza peso totale $\boldsymbol{P} = (2\,m + M)\,\boldsymbol{g}$ che è applicata nel centro di massa del sistema. Dunque, l' equilibrio delle forze implica $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{P} = 0$, cioè

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P} = (\,0\,,\,(\,2\,m + M)\,g) \tag{1}$$

L'equilibrio dei momenti si raggiunge solamente se la coppia di forze uguali ed opposte $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{P}$ ha braccio nullo e, cioè, se la forza peso totale è applicata in O. Dunque, il cento di massa dei tre corpi (barra, massa m e massa M) si trova in O. Osservando che il centro di massa della barra si trova al centro della barra e <u>a sinistra</u> di O a distanza $L/2 - L/3 = L/6$ da O, il centro di massa del sistema si trova in O se

$$-M\,L/3 - m\,L/6 + m\,L/3 = 0 \quad \text{, cioè,} \quad M = m/2 = 1\text{ kg} \tag{2}$$

Sostituendo il valore $M = 1$ kg in eq. (1) si trova

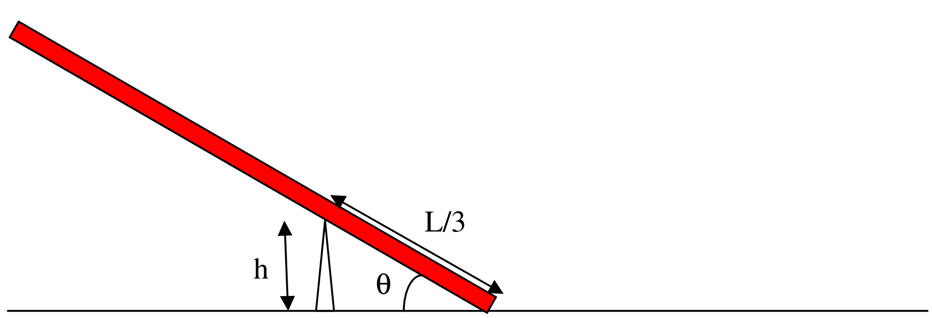
$$\boldsymbol{R} = (\,0\text{ N},\,49\text{ N}) \tag{3}$$

1.2 - La reazione vincolare e la forza di attrito statico non compiono lavoro perché il punto di contatto fra cuneo e barra resta fermo. Dunque, poiché le altre forze sono conservative (forze peso), si conserva l'energia meccanica. Assumendo come zero dell'energia potenziale la posizione iniziale, allora l'energia meccanica iniziale è nulla. Dunque, anche l'energia meccanica finale dovrà essere nulla. La massima velocità angolare verrà raggiunta nel punto in cui diventa minima l'energia potenziale e, quindi, quando il centro di massa del sistema costituito dalla barra e dal corpo di massa m si trova più in basso. Il centro di massa del sistema si trova in un punto della barra <u>a destra</u> di O e a distanza da O pari a

$$d_{CM} = m(\,L/3 - L/6\,)\,/\,2\,m = L/12 \tag{3}$$

Il momento di forza rispetto ad O esercitato dalla forza peso totale $\boldsymbol{P} = 2\,m\,\boldsymbol{g}$ applicata nel centro di massa è entrante nel piano della figura e la rotazione della barra è, quindi, oraria. Al ruotare della barra il centro di massa si abbassa e raggiunge il valore più basso quando l'estremo DESTRO della barra tocca terra e la barra forma un angolo θ che soddisfa la relazione trigonometrica (vedi figura sotto)

$$\sin\theta = h\,/(L/3) = ½ \quad \text{, cioè} \qquad \theta = 30° \tag{4}$$



Per la conservazione dell'energia meccanica, vale la relazione:

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 - 2m\, g\, d_{CM}\, sin\theta = 0 \tag{5}$$

dove I_O è il momento di inerzia del sistema (massa m + barra) rispetto al polo O che è pari a

$$I_O = m\, L^2/12 + m\, L^2/36 + m\, L^2/9 = 2\, m\, L^2/9 \tag{6}$$

dove abbiamo utilizzato il teorema degli assi paralleli. Sostituendo nella (5) il valore di I_O di eq.(6) e i valori di d_{CM} e θ di equazioni (3) e (4), la (5) diventa:

$$\frac{1}{9} m\, L^2 \omega^2 - \frac{1}{12}\, m\, g\, L = 0 \tag{7}$$

che ha come soluzione:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4L}} = 1.92 \quad \text{rad/s}^2 \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- Il momento della quantità di moto rispetto ad O si conserva poiché l'unica forza impulsiva esterna agente sul sistema asta + proiettile è quella esercitata dall'asse che è applicata in O (il momento di questa forza rispetto ad O è sempre nullo). Il momento della quantità di moto è diretto lungo l'asse z uscente dal piano di figura. All'inizio,

$$L_{iz} = m\, L\, v_0/2 = 2 \ \text{Kg m}^2/\text{s} \tag{1}$$

Subito dopo l'urto:

$$L_{fz} = I\, \omega = (M + 3\, m)\, L^2 \omega/12 \tag{2}$$

dove

$$I = ML^2/12 + mL^2/4 = (M + 3\, m)\, L^2/12 \tag{3}$$

è il momento di inerzia del sistema asta + proiettile rispetto al centro di massa dell'asta. Imponendo la conservazione del momento della quantità di moto ($L_{iz} = L_{fz}$) si trova, dopo semplici passaggi algebrici:

$$\omega = \omega_0 = 6\, m\, v_0 /[(\text{M} + 3\text{m})\, L) = 2.609 \ \text{rad/s} \tag{4}$$

Inizialmente, subito dopo l'urto, il centro di massa del sistema si trova sotto il punto O a distanza

$$d_{CM} = m\, L /[2\, (M + m)] = 0.04762 \ \text{m} \tag{5}$$

Dopo l'urto il centro di massa ruota in senso antiorario attorno ad O su una traiettoria circolare di raggio $r = d_{CM}$. Nel processo <u>successivo</u> all'urto si conserva l'energia meccanica del sistema barra + proiettile perché non ci sono attriti e la forza di reazione dell'asse è applicata nel punto fisso O. Le possibilità sono due: o il sistema non riesce a compiere una rotazione completa e si ferma ad un certo angolo di rotazione (in tal caso la minima velocità angolare è nulla) oppure il sistema riesce a compiere una rotazione completa e raggiunge la minima velocità angolare quando il centro di massa si trova alla massima altezza dove è massima l'energia potenziale gravitazionale. Assumiamo che valga la seconda ipotesi e assumiamo come zero dell'energia potenziale la posizione iniziale del centro di massa. Con tale ipotesi, l'energia meccanica iniziale è

$$E_i = I\,\omega_0^2/2 = (M + 3\,m)\,L^2\omega_0^2\,/24 \qquad (6)$$

L'energia meccanica finale nel punto più alto è

$$E_f = I\,\omega^2/2 + 2\,(M + m)\,g\,d_{CM} = (M + 3\,m)\,L^2\omega^2\,/24 + \ m\,g\,L \qquad (7)$$

Imponendo l'uguaglianza $E_i = E_f$, si ottiene dopo semplici passaggi il valore della velocità angolare minima che è pari a:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{24\,m\,g}{(M+3m)L}} = 1.30 \text{ rad/s} \qquad (8)$$

Poiché il radicando è maggiore di zero, l'equazione (8) ammette una soluzione reale. Ciò significa che l'ipotesi da noi fatta che l'asta raggiunga la posizione di massima altezza senza fermarsi è corretta.

2.2 – L'unica forza esterna impulsiva agente sul sistema sbarra + proiettile è quella dovuta all'asse. L'impulso $\boldsymbol{I}$ di tale forza è, perciò, uguale alla variazione di quantità di moto del sistema. Inizialmente la quantità di moto è solamente quella del proiettile perché l'asta è ferma

$$\boldsymbol{p}_i = (\,m\,v_0\,,\,0) \qquad (9)$$

Subito dopo l'urto il centro di massa della barra che si trova in O è ancora fermo e, quindi, la quantità di moto della barra è nulla e, quindi, la quantità di moto totale è uguale alla sola quantità di moto del proiettile che compie un moto circolare attorno ad O con velocità iniziale di modulo $v_0 = \omega_0\,L/2$ diretta nel verso positivo dell'asse x. La quantità di moto del proiettile è, quindi:

$$\boldsymbol{p}_f = (\,m\,\omega_0\,L/2\,,\,0) \qquad (10)$$

Dunque, L'impulso della forza è:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = (m\,\omega_0 L/2 - m\,v_0\,,\,0) = (\,-\,1.74 \text{ N s},\, 0 \text{ N s}) \qquad (10)$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – In assenza del piombo il cubetto di legno si trova in equilibrio quando il suo peso e' equilibrato dalla forza di Archimede che è proporzionale al volume sommerso del legno che è 0.8 V dove V = volume del cubetto di legno. Dunque

$$\rho_a 0.8V\,g = mg \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m}{\rho_a 0.8} = 0.625\;10^{-3}\text{ m}^3 \qquad (1)$$

dove $\rho_a = 1000$ Kg/m^3 è la densità dell'acqua. Dopo che viene aggiunto il corpo, la condizione di equilibrio diventa:

$$\rho_a\,0.9\,V\,g = (\,m + M)\,g \;\Rightarrow\; M = \rho_a\,0.9\,V - m = \rho_a\,0.9\,V - \rho_a\,0.8\,V = 0.0625 \text{ Kg} \qquad (2)$$

3.2 Prima di inserire il corpo di massa M, l'altezza h_0 della superficie dell'acqua soddisfa l'equazione:

$$Sh_0 = V_0 + 0.8\ V \qquad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{V_0 + 0.8V}{S} \tag{3}$$

dove V_0 è il volume (incognito) di acqua. Dopo che è inserito il piombo l'altezza h soddisfa la nuova relazione:

$$Sh = V_0 + 0.9\ V \qquad \Rightarrow \quad h = (V_0 + 0.9\ V)/\ S \tag{4}$$

La pressione sul fondo all'inizio era (legge di Stevino) $p_i = p_0 + \rho_a g h_0$ mentre alla fine è $p_f = p_0 + \rho_a g h$ dove p_0 è la pressione atmosferica. Di conseguenza, la variazione di pressione è

$$\Delta p = p_f - p_i = 0.1\ V\ \rho_a\ g/\ S = 61.3\ \text{Pa} \tag{5}$$