Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE.
27 giugno 2019

Esercizio 1 – Un rocchetto cilindrico è costituito da due dischi ciascuno di massa m = 1 kg e raggio r = 5 cm coassiali ad un cilindro di massa m e raggio $r/2$ come mostrato schematicamente in figura 1a. Sul cilindro è avvolta una fune inestensibile e di massa trascurabile che NON scivola su di esso. L'altra estremità della fune è collegata ad un corpo di massa M come mostrato in figura 1b. La carrucola in figura ha massa trascurabile e ruota con attrito trascurabile.

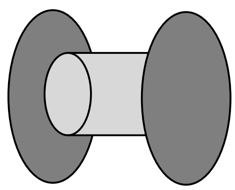


Fig. 1a

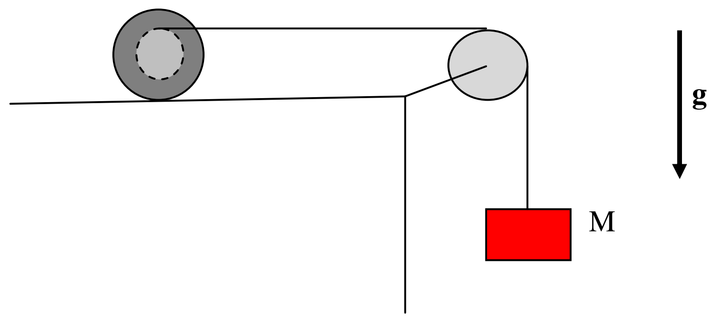


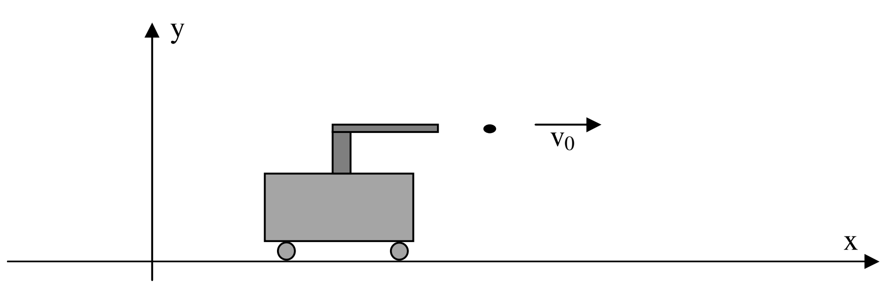
Fig. 1b

1.1 – Si calcoli il momento di inerzia I del rocchetto rispetto al suo asse.(3 punti).

1.2 – Nell'ipotesi che il moto del rocchetto sia di rotolamento puro, si trovi la tensione T della fune se la massa M ha il valore M = 2 kg.(5 punti).

1.3 – Sapendo che il coefficiente di attrito statico fra rocchetto e pavimento è pari a μ = 0.15, si dica per quali valori di M il moto è effettivamente un moto di rotolamento puro e si verifichi che l'ipotesi di rotolamento puro fatta al punto 1.2 sia effettivamente verificata nel caso M=2 kg.(3 punti).

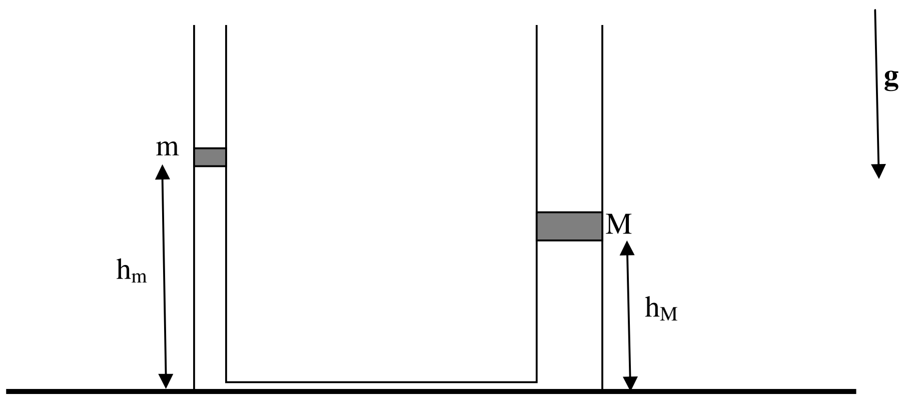
Esercizio 2 – Un carrello di massa M = 100 kg è inizialmente fermo su un binario rettilineo che esercita un attrito trascurabile. Sul carrello è montata una mitragliatrice di massa m = 20 kg orientata orizzontalmente lungo il binario orizzontale. Al tempo t = 0 la mitragliatrice inizia a sparare in modo continuo n = 2 proiettili al secondo di massa m_p = 50 g che vengono espulsi con velocità v_0 = 300 m/s rispetto a terra nel verso positivo dell'asse x. Per semplicità di calcolo si consideri trascurabile la massa dei proiettili presenti sul carrello rispetto alla massa del carrello e della mitragliatrice, cioè si assuma che la massa totale del sistema carrello + mitragliatrice + proiettili presenti sul carrello sia costante ad ogni istante ed uguale a $M + m$.



2.1 – Si calcoli la velocità raggiunta dal carrello dopo un tempo Δt = 10 s. (5 punti)

2.2 – Si trovi il valore della forza media esercitata sul sistema carrello + mitragliatrice nell'intervallo di tempo Δt. (5 punti)

Esercizio 3 – Due lunghi contenitori cilindrici di sezione interna, rispettivamente, $S_0 = 10^{-3}$ m^2 e 4 S_0 sono collegati sul fondo da un tubicino di sezione trascurabile. All'interno del sistema di cilindri viene immesso un volume V = 1 litro di mercurio (densità $\rho = 13.6\ 10^3$ kg/m^3). Due pistoni, rispettivamente di massa m = 1 kg e M = 6 m vengono introdotti rispettivamente nei cilindri di sezione S_0 e 4 S_0 fino a toccare le superfici libere dei cilindri. All'esterno è presente un atmosfera a pressione $p_0 = 10^{5}$ Pa.



3.1 – Si trovi a quale altezza h_m arriva il pistone di massa m all'equilibrio. (6 punti)

Si osserva che se la massa M del pistone viene aumentata, il pistone di massa m continua a salire ma esso smette di sollevarsi se la massa M supera un valore massimo M_0.

3.2- Si spieghi perché il pistone si massa m smette di salire e si trovi il valore massimo M_0. (3 punti)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1 - 1.1 – Il momento di inerzia è la somma dei momenti di inerzia dei due dischi e del momento di inerzia del cilindro centrale, dunque:

$$I = m\,r^2/2 + m\,r^2/2 + m(r/2)^2/2 = 9\,m\,r^2/8 = 2.81\ 10^{-3}\ \text{Kg m}^2 \qquad (1)$$

1.2- Le equazioni del moto del corpo di massa M e del rocchetto sono:

corpo M: $$M\,g - T = M\,a \qquad (2)$$

rocchetto: $$T - F_s = 3\,m\,a_c \qquad (3)$$

$$T\,r/2 + F_s\,r = I\,\alpha \qquad (4)$$

dove a è l'accelerazione della massa M, a_c è l'accelerazione del centro del rocchetto e α è l'accelerazione angolare del rocchetto. Poiché la fune non scivola rispetto al rocchetto, l'accelerazione a della fune deve coincidere con l'accelerazione del punto del rocchetto che è in contatto con la fune e che si trova a distanza $3r/2$ dal punto di contatto del rocchetto con il piano. D'altra parte, il moto di rotolamento puro è equivalente ad una rotazione istantanea rispetto al punto di contatto fra rocchetto e superficie piana. Ne consegue che $a = 3\,\alpha\,r/2$ mentre l'accelerazione del centro del cilindro è $a_c = \alpha\,r$. Dunque, valgono le relazioni:

$$a_c = 2\,a/3 \qquad (5)$$

e $$\alpha = a_c/r = 2\,a\,/\,(3\,r) \qquad (6)$$

Sostituendo la (5) nella (3) e la (6) nella (4) insieme all'espressione del momento di inerzia di eq.(1) si trova:

$$T - F_s = 2\,m\,a \qquad (7)$$

$$T/2 + F_s = 3\,m\,a\,/4 \qquad (8)$$

La soluzione del sistema di equazioni (2), (7) e (8) è:

$$a = 6\,M\,g\,/(6M + 11\,m) = 5.11\ \text{m/s}^2 \qquad (9)$$

$$T = 11\,m\,M\,g\,/(6M + 11\,m) = 9.37\ \text{N} \qquad (10)$$

$$F_s = -\ m\,M\,g\,/(6M + 11\,m) = -0.85\ \text{N} \qquad (11)$$

Il segno – nella (11) indica che, contrariamente a quanto da noi assunto, la forza di attrito statico è diretta nel verso del moto.

1.3- Perché il moto sia di rotolamento puro è necessario che il <u>modulo</u> della forza di attrito statico di eq.(11) non superi il massimo valore consentito pari a $\mu\,R = 3\,\mu\,m\,g$. Dunque,

$$m\,M\,g\,/\,(6\,M + 11\,m) \le 3\,\mu\,m\,g \qquad (12)$$

moltiplicando entrambi i membri della (12) per 6 M + 11 m (> 0) e raccogliendo nel membro a sinistra i contributi proporzionali all'incognita M si ottiene la disuguaglianza

$$M\ (1 - 18\ \mu)\ \leq 33\ \mu\, m \tag{13}$$

Poiché 1 – 18 μ = - 1.7 < 0, il membro a sinistra è sempre negativo mentre quello a destra è positivo, dunque la (13) è sempre verificata qualunque sia il valore di M. Dunque, l'ipotesi di rotolamento puro fatta nel caso M = 2 kg del punto 1.2) è ben verificata.

Soluzione Es. 2 - 2.1 – Lungo x non ci sono forze esterne e, quindi, la componente x della quantità di moto costituita dal sistema carrello + mitragliatrice + proiettili si deve conservare. Poiché i proiettili hanno una massa molto piccola rispetto alle altre masse, possiamo trascurare la loro massa e supporre la massa del sistema costante e pari a $m + M$. Se v_i è la velocità del carrello ad un generico istante subito prima di uno sparo e v_f è quella all'istante immediatamente successivo, la conservazione della quantità di moto si scrive

$$(M + m)\ v_i = (M + m)\ v_f + m_p\, v_0 \tag{1}$$

Dunque, la variazione di velocità del carrello ad ogni sparo è pari a

$$\Delta v = v_f - v_i = -\ m_p\ v_0 /(\ M + m) \tag{2}$$

Si noti che la variazione di velocità del carrello ad ogni sparo ha sempre lo stesso valore, indipendentemente dalla velocità iniziale del carrello. Nel tempo Δt vengono sparati $n\ \Delta t$ proiettili e, quindi, la velocità del carrello che era inizialmente pari a zero diventa

$$v = n\ \Delta t\ \ \Delta v = -\ n\ \Delta t\ \ m_p\ v_0 /(\ M + m) = -\ 2.5\ \text{m/s} \tag{3}$$

2.2 - La forza media agente sul sistema nell'intervallo di tempo Δt è diretta lungo x ed è pari a

$$< F > = \Delta I_{\Delta t}\ /\ \Delta t \tag{4}$$

dove $\Delta I_{\Delta t}$ rappresenta la variazione di quantità di moto del sistema carrello + mitragliatrice nel tempo Δt. Ad ogni sparo la variazione di quantità di moto è pari a

$$\Delta I = (M + m)\ \ \Delta v = -\ m_p\ v_0 \tag{5}$$

Dunque, la variazione di quantità di moto totale nell'intervallo di tempo Δt in cui vengono sparati $n\ \Delta t$ proiettili è $n\ \Delta t\ \Delta I$ che, sostituita nella (4) fornisce la forza media

$$< F > = -\ n\ \ m_p\ v_0 = -\ 30\ \text{N} \tag{6}$$

Metodo alternativo: Si poteva calcolare anche la forza media nel tempo Δt come pari al prodotto della massa M + m per l'accelerazione media che è pari a (v – 0)/Δt. In tal modo si ottiene rapidamente la relazione (6).

Soluzione Es. 3

3.1 – Prima che i pistoni vengano inseriti, le superfici del fluido nei due recipienti si trovano alla stessa altezza h_0 (vasi comunicanti). Il valore di tale altezza si ottiene sfruttando il fatto che il volume $V = (S_0 + 4\, S_0)\, h_0 = 5\, S_0\, h_0$ del fluido è noto e pari a V = 1 litro = 10^{-3} m^3. Quindi

$$h_0 = V/\,(5\, S_0) = 0.2 \text{ m} \qquad (1)$$

Quando i pistoni vengono inseriti, il pistone di massa M si abbassa mentre quello di massa m si solleva fino a raggiungere un nuovo equilibrio. Indichiamo con h_m e h_M le altezze dei pistoni di massa m e M all'equilibrio. Imponendo che la forza totale agente su ciascun pistone sia nulla (equilibrio dei pistoni), si trova immediatamente che la pressione esercitata dal mercurio nei punti di contatto con i pistoni ad altezza h_m e h_M è data, rispettivamente, dalle relazioni:

$$p_\mathrm{m} = p_0 + mg/S_0 \qquad \text{e} \qquad p_\mathrm{M} = p_0 + Mg/(4S_0) \qquad (2)$$

D'altra parte la pressione all'interno del mercurio deve soddisfare la legge di Stevino, cioè deve valere la relazione

$$p_\mathrm{M} = p_\mathrm{m} + \rho\, g\, (\, h_\mathrm{m} - h_\mathrm{M}) \qquad (3)$$

dalla (3) si deduce la relazione

$$h_\mathrm{m} - h_\mathrm{M} = (p_\mathrm{M} - p_\mathrm{m})/\,(\rho\, g) \qquad (4)$$

Sostituendo nella (4) i valori di p_M e p_m dati in eq.(2) si ottiene, infine

$$h_\mathrm{m} - h_\mathrm{M} = (M/4 - m)\,/(\,\rho\, S_0) \qquad (5)$$

D'altra parte, il volume occupato dal mercurio deve essere costante e questo comporta un'altra relazione fra h_m e h_M che si scrive

$$S_0\, h_\mathrm{m} + 4\, S_0\, h_\mathrm{M} = V \qquad (6)$$

Le equazioni (5) e (6) costituiscono un sistema di equazioni lineari nelle incognite h_m e h_M la cui soluzione è

$$h_\mathrm{M} = V/\,(5\, S_0) - (M/4 - m)/\,(\,5\,\rho\, S_0) \qquad (7)$$

$$h_\mathrm{m} = V/\,(5\, S_0) + (M - 4\, m)/\,(\,5\,\rho\, S_0) \qquad (8)$$

Sostituendo i valori dei parametri si trova $h_\mathrm{m} = 0.229$ m e $h_\mathrm{M} = 0.193$ m.

3.2 – All'aumentare di M, in accordo con le relazioni (7) e (8), la massa m si solleva sempre più mentre la massa M si abbassa sempre più. Ma le relazioni (7) e (8) restano valide solo finché la massa M non arriva a toccare il fondo ($h_\mathrm{M} = 0$ in eq.(7)) e ciò avviene quando M è uguale a quel valore M_0 che azzera h_M in eq.(7). Per $M > M_0$ il fondo esercita sulla massa M una forza di reazione normale che impedisce ogni ulteriore abbassamento del pistone. In queste condizioni , anche m non si sposta (il volume occupato dal mercurio deve restare costante). Dunque, il valore massimo M_0 cercato è quello per cui $h_\mathrm{M} = 0$ in eq.(7), cioè deve soddisfare la relazione

$$V = (M_0/4 - m)/\,\rho \quad , \text{cioè} \qquad M_0 = 4\,\rho\,V + 4\,m = 58.4\ \text{kg} \tag{9}$$