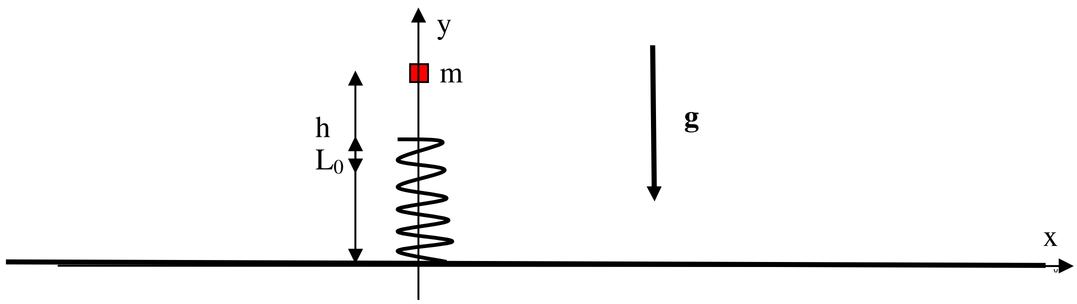
COMPITO FISICA GENERALE INGEGNERIA CIVILE-EDILE-AMBIENTALE 18 luglio 2019

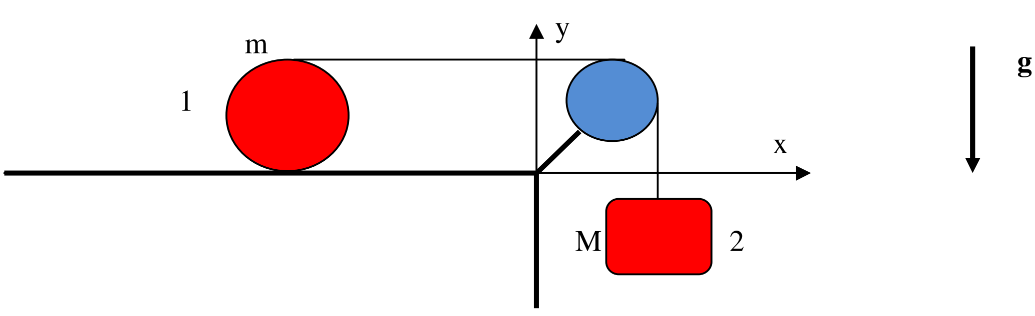
Esercizio 1 – Una molla di costante elastica K = 200 N/m di lunghezza a riposo L_0 = 1 m è attaccata ad una estremità al terreno. La molla si trova inizialmente nella sua posizione di riposo. Un corpo di massa m = 2 kg e dimensioni trascurabili si trova inizialmente fermo ad altezza h = 1 m rispetto all' estremità superiore della molla ($y = L_0$ in figura). Il corpo viene lasciato libero di cadere dalla posizione iniziale e arriva a urtare la molla al tempo t = 0.



1.1 – Supponendo trascurabili gli attriti, si calcoli la massima compressione della molla. (5 punti)

1.2 - Si trovi la forza di reazione normale R esercitata dal pavimento sulla molla nel momento di massima compressione e la velocità raggiunta in seguito dal corpo nel momento in cui si stacca nuovamente dalla molla. (5 punti)

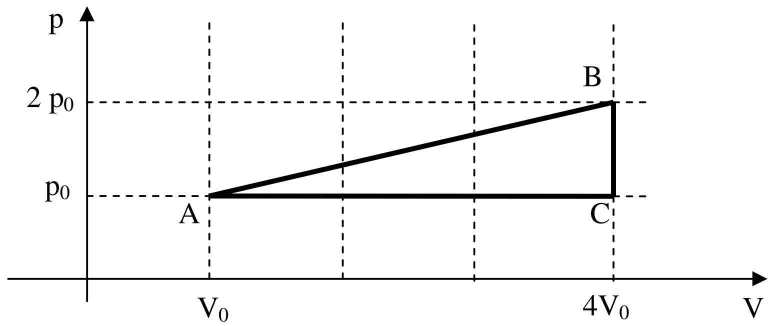
Esercizio 2- Un cilindro (1) di massa m = 2 Kg e raggio r = 10 cm è appoggiato su un piano ruvido ed è collegato ad un corpo (2) di massa M = 2 m attraverso ad una fune inestensibile di massa trascurabile appoggiata su una carrucola di massa trascurabile che può ruotare liberamente senza attrito. Il corpo 2 è inizialmente fermo e viene lasciato libero al tempo t = 0. Si supponga che la fune sia avvolta sul cilindro e che <u>non scivoli sul cilindro</u> e che il cilindro compia un moto di rotolamento puro.



2.1 – Si trovi la relazione fra l'accelerazione a_1 del centro di massa del cilindro e l'accelerazione a_2 del corpo 2 e si trovi il valore di a_1 durante il moto di rotolamento. (6 punti)

2.2- Si trovino le componenti x ed y della forza di reazione esercitata dalla carrucola sulla fune. (4 punti)

Esercizio 3 – Un gas <u>biatomico</u> ideale con $n = 0.2$ moli compie il ciclo reversibile *ABCA* mostrato in figura con $p_0 = 10^5$ Pa e $V_0 = 10^{-3}$ m^3.



3.1 – Si dica, giustificando la risposta, se il sistema si comporta da motore o da pompa di calore e se il gas scambia calore con due o più termostati. Si calcoli, inoltre, il calore totale assorbito dal gas e la massima temperatura raggiunta nel ciclo. (6 punti)

3.2 – Sapendo che le molecole del gas hanno massa $m = 5 \times 10^{-26}$ kg, si calcoli la velocità quadratica media <u>minima</u> raggiunta dalle molecole nel ciclo. (4 punti)

(si usino i valori $R = 8.316$ J/(K mole) e $N_A = 6.022\ 10^{+23}$)

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1.1 – Non essendoci attriti, si conserva l'energia meccanica. All'inizio e alla fine (massima compressione) il corpo è fermo e, quindi, in entrambi i casi l'energia meccanica è uguale all'energia potenziale. All'inizio il corpo è fermo e possiede solo l'energia potenziale gravitazionale e, quindi, l'energia meccanica è:

$$E_i = m\, g\, h \tag{1}$$

dove si è preso come 0 dell'energia gravitazionale la posizione iniziale di riposo della molla in figura. Alla fine, quando la molla ha raggiunto la massima compressione, il corpo è nuovamente fermo e, quindi, oltre all'energia gravitazionale c'è anche quella elastica.

$$E_f = -\ mg\ \delta y + K\ \delta y^2/2 \tag{2}$$

dove con δy indichiamo la compressione della molla e, quindi, $\delta y > 0$ indica che la molla è compressa ($y = L_0 - \delta y$) mentre $\delta y < 0$ indica che essa è allungata. Imponendo l' uguaglianza $E_i = E_f$ si trova l'equazione di secondo grado in δy:

$$K\ \delta y^2/2 -\ mg\ \delta y\ - m\, g\, h = 0 \tag{3}$$

La soluzione positiva ($\delta y > 0$) che corrisponde alla massima compressione è

$$\delta y_{max} = \frac{mg+\sqrt{m^2g^2+2mgh\,K}}{K} = 0.551 \text{ m} \tag{4}$$

1.2- Nel momento di massima compressione la molla esercita sul pavimento la forza elastica diretta verso il basso (verso opposto a quello dell'asse x di figura) e pari in modulo a $K\ \delta y_{\max}$. Per il principio di azione e reazione il pavimento esercita sulla molla una forza di modulo uguale diretta lungo l'asse verticale y nel verso positivo. Dunque, la componente x della forza esercitata dalla molla nel momento di massima compressione è nulla mentre la componente y è:

$$R = K\ \delta y_{\max} = 110 \text{ N} \tag{5}$$

Il corpo si stacca nuovamente dalla molla quando la molla, dopo aver compiuto una semioscillazione, raggiunge nuovamente la posizione iniziale di riposo. Poiché in tale posizione l'energia potenziale (gravitazionale ed elastica) è nulla, il corpo ha solo energia cinetica $mv^2/2$. Poiché l'energia meccanica si conserva sempre, questa energia cinetica deve essere uguale all'energia meccanica iniziale mgh. Dunque, $mgh = mv^2/2$ e, quindi:

$$v = (\ 2gh)^{1/2} = 4.43 \text{ m/s} \tag{6}$$

Soluzione Esercizio 2. **2.1**- La fune è inestensibile e, quindi, l'accelerazione di ogni suo punto è la stessa. Dunque l'accelerazione a_2 del corpo 2 è uguale all'accelerazione del punto P sulla sommità del cilindro. D'altra parte, un rotolamento puro corrisponde ad una rotazione istantanea rispetto al punto di contatto con il pavimento e, quindi, il modulo dell'accelerazione di ciascun punto del cilindro è proporzionale alla distanza del punto dal punto di contatto. Conseguentemente, l'accelerazione del punto sulla sommità del cilindro è il doppio dell'accelerazione a_1 del centro di massa. Dunque

$$a_2 = 2\,a_1 \qquad (1)$$

Le equazioni cardinali per il moto dei due corpi sono (assumendo F_s orientata in verso opposto ad x e prendendo come polo il punto di contatto fra cilindro e piano orizzontale che è un PUNTO FISSO) :

$$T - F_s = m\,a_1 \qquad (2)$$

$$T\,2r = 3mr^2\alpha_1 / 2 = 3mra_1/ 2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{3}{4}ma_1 \qquad (3)$$

e $$Mg - T = M\,a_2 = 2\,M\,a_1 \qquad (4)$$

Tenendo conto che $M = 2\,m$, la (4) diventa

$$2mg - T = 4\,m\,a_1 \qquad (5)$$

Per scrivere la (3), abbiamo sfruttato la condizione di rotolamento puro $\alpha_1 = a_1/r$ e il fatto che il momento di inerzia del cilindro (rispetto all'asse perpendicolare alla figura e passante per il punto di contatto) è $I = 3\,m\,r^2/2$. Sostituendo la (3) nella (5) si trova, dopo semplici passaggi:

$$a_1 = 8g\,/19 = 4.13\ \text{m/s}^2 \qquad (6)$$

mentre, sostituendo la (3) nella (2) si trova :

$$F_s = -\,m\,a_1/4 = -\,2mg/19 = -\,2.06\ \text{N} \qquad (7)$$

e, sostituendo la (6) nella (3) si trova:

$$T = 6\,mg\,/19 = 6.19\ \text{N} \qquad (8)$$

Il segno – nell'espressione della forza di attrito indica che essa, contrariamente alla nostra assunzione, è orientata nel verso positivo dell'asse x.

2.2 – Sulla carrucola le funi esercitano le forze di tensione $\boldsymbol{T}_1 = (-T, 0)$ e $\boldsymbol{T}_2 = (0, -T)$. Ne consegue che, per il principio di azione e reazione, la reazione $\boldsymbol{R}$ della carrucola deve essere uguale ed opposta alla forza totale $\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$ esercitata dalla fune, cioè

$$\boldsymbol{R} = -\,\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2 = (T, T) = (6.19\ \text{N}, 6.19\ \text{N}) \qquad (9)$$

Soluzione Esercizio 3 – 3.1 – Il lavoro fatto nel ciclo è maggiore di zero perché il ciclo avviene in verso orario e, quindi, il sistema è un motore. Dalla figura si deduce immediatamente che nel ciclo il gas assume tutte le temperature comprese fra un minimo in A e un massimo in C [la temperatura in ogni punto deve soddisfare la relazione $T = pV/(nR)$]. Conseguentemente sono necessari più di due termostati per realizzare il ciclo. Poiché nel ciclo non c'è variazione di energia interna, il calore totale assorbito dal gas nel ciclo è pari al lavoro totale che è pari all'area interna al triangolo di figura. Dunque:

$$Q = 3\,p_0V_0 / 2 = 150\ \text{J} \qquad (1)$$

La massima temperatura viene raggiunta nel punto dove è massimo il prodotto pV, cioè nel punto B. Dalla legge dei gas perfetti si deduce

$$T_B = 8p_0V_0/nR = 481\ \text{K} \qquad (2)$$

3.2 - La velocità quadratica media $v_{qm} = (<v^2>)^{1/2}$ del gas si ottiene dalla legge

$$\frac{3}{2} K_B T = \frac{1}{2}\, m v_{qm}^2 \qquad (3)$$

dove K_B è la costante di Boltzman. Si osservi che la velocità quadratica media per un gas monoatomico e biatomico è sempre data dalla relazione (3) perché l'energia cinetica media di traslazione è sempre pari a 3 K_B T /2 (i gradi di libertà traslazionali sono sempre 3 per qualunque gas). Dalla (3) si deduce che la velocità quadratica media è minima nel punto dove la temperatura è minima, cioè in A dove

$$T_A = p_0V_0/nR = 60.1\ \text{K} \qquad (4)$$

Dunque, la velocità quadratica media minima delle molecole è:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3K_BT_A}{m}} = \sqrt{\frac{3RT_A}{N_A m}} = 223\ \text{m/s} \qquad (5)$$