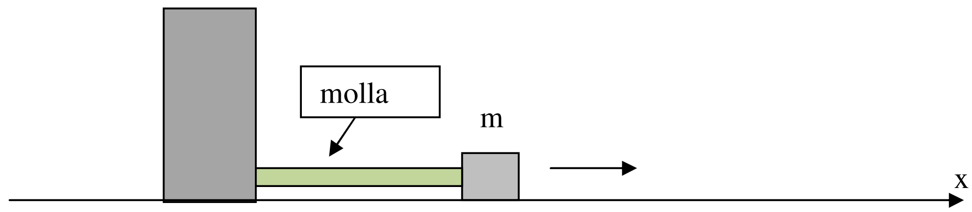
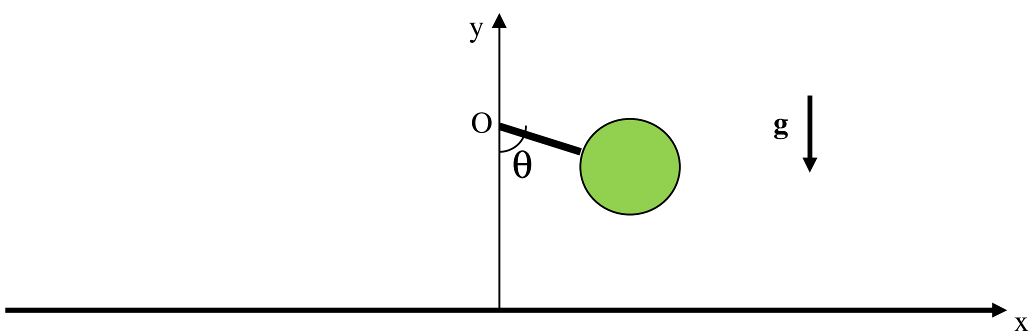
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE,
17 Settembre 2019

Esercizio 1 – Una molla ideale di costante elastica K = 1000 N e lunghezza a riposo L_0 = 20 cm è disposta orizzontalmente su un piano privo di attrito. Una estremità della molla è fissata ad una parete verticale mentre l'altra estremità è collegata ad un corpo di massa m = 3 kg. Al tempo t = 0 il corpo si trova nella posizione di riposo e viaggia nel verso positivo dell'asse x con velocità v_0 = 5 m/s.



1.1 – Si trovi a quale istante la velocità della molla si dimezza per la prima volta. (5 punti)

Esercizio 2 – Un sistema è costituito da un'asta rigida di massa m = 10 kg e lunghezza L = 20 cm collegata ad una estremità ad una sfera di raggio r = L/2 = 10 cm e massa m = 10 kg. L'altra estremità della barra è vincolata a ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O e ortogonale al piano di figura. Il sistema è in presenza del campo di gravità terrestre. All'istante t = 0 l'asta forma un angolo $\theta = \theta_0$ = 60° con l'asse verticale e ruota con velocità angolare $\omega = \omega_0$ = 6 rad/s in verso antiorario (vedi figura).

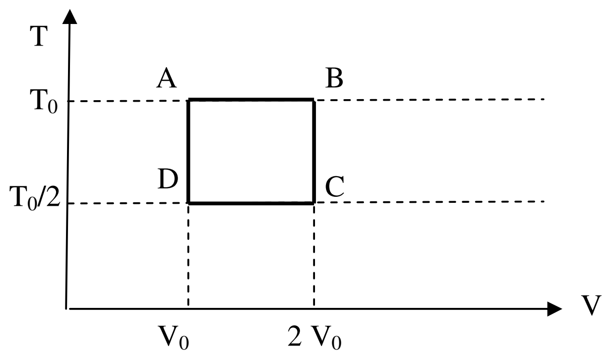


2.1 – Si trovi la distanza d del centro di massa del sistema da O.(3 punti)

2.2 – Si trovi la minima velocità angolare raggiunta dal sistema nel moto successivo e l'angolo (o gli angoli) a cui viene raggiunta tale minima velocità (6 punti)

2.3 – Si trovino le componenti x,y e z (asse perpendicolare ed uscente dalla pagina) della forza esercitata dall'asse passante per O sulla barra quando essa forma l'angolo θ = 0 con l'asse verticale. (6 punti)

Esercizio 3 – Una mole di gas perfetto compie un ciclo *ABCDA* che nel piano T,V è rappresentato dal rettangolo mostrato in figura dove la temperatura T_0 è pari a $T_0 = 300$ K e il volume V_0 è pari a $V_0 = 0.2$ m^3.



3.1 – Si dica se la trasformazione è reversibile e si calcoli la pressione del gas negli stati *A* e *B*. Si disegni il grafico del ciclo nell'ordinario diagramma p,V. (5 punti)

3.2- Si calcoli il calore totale assorbito dal gas nel ciclo (5 punti).

Si utilizzi per i calcoli il valore $R = 8.316$ J/ (mole K) della costante dei gas perfetti.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1 -

La molla compie un moto armonico rispetto alla posizione di riposo con pulsazione

$\omega = (K/m)^{1/2}$ = 18.3 rad/s. (1)

Prendendo come origine x = 0 la posizione della massa quando la molla è a riposo, la coordinate x varia nel tempo secondo l'equazione

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Conseguentemente la velocità v = dx/dt è pari a

$$v(t) = - A\ \omega \sin(\omega t + \varphi) \qquad (3)$$

La (2) e la (3) devono soddisfare le condizioni iniziali x=0 e $v = v_0$ e, quindi, le costanti A e φ hanno i valori $A = - v_0/\omega$ e $\varphi = \pi/2$. Conseguentemente la velocità di equazione (3) diventa

$$v(t) = v_0 \sin(\omega t + \pi/2) = v_0 \cos(\omega t) \qquad (4)$$

La velocità $v(t)$ si dimezza rispetto al valore iniziale se $v(t) = v_0/2$, cioè se

$$\cos(\omega t) = ½ \qquad \Rightarrow \qquad \omega t = \pi/3 \qquad (5)$$

e, quindi, al tempo

$$t = \pi/(3\ \omega) = \ \ 0.0574 \text{ s} = 57.4 \text{ ms} \qquad (6)$$

Soluzione Esercizio 2-

2.1 - La distanza del centro di massa da O è pari a

$$d = \frac{\frac{mL}{2} + m(L+r)}{2m} = \frac{3L}{4} + r/2 = L = \ 0.2 \text{ m} \qquad (1)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $r = L/2$. (2)

2.2 - Poiché non c'è attrito si conserva l'energia meccanica del sistema di massa totale 2 m che è pari a

$$E = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 + \ 2\, mgH \qquad (2)$$

Dove H è l'altezza del centro di massa rispetto alla posizione di energia gravitazionale 0 che assumiamo essere quella in cui l'asta è verticale e $\theta = 0$. Con questa scelta
$H = d\,(1 - \cos\theta) = L\,(1 - \cos\theta)$ dove abbiamo utilizzato la (1) per ottenere l'ultima espressione. Il parametro I in eq.(2) è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse passante per O ed è pari a

$$I = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(r+L)^2 = \ \ 1.07 \text{ kg m}^3 \qquad (3)$$

Sostituendo nella (2) il valore $h = L\ (1 - \cos\ \theta)$, l'energia meccanica di eq.(2) diventa

$$E = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2 +\ 2\ mgL(1 - \cos\theta) \qquad (4)$$

Inizialmente $\theta = \theta_0$ e $\omega = \omega_0$ e, quindi, l'energia meccanica iniziale è

$$E_i = \frac{1}{2}\ I\ \omega_0^2 +\ 2\ mgL(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}\ I\ \omega_0^2 +\ \ mgL = 38.9\ \text{J} \qquad (5)$$

dove, per ottenere l'ultima espressione a destra, abbiamo sfruttato il fatto che $\cos\ \theta_0 = ½$. Per la conservazione dell'energia meccanica, la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale è costante e, quindi l'energia cinetica è minima nel punto di massima energia potenziale raggiunta dal sistema. Si danno due casi possibili: a) L'energia meccanica iniziale è maggiore o uguale della massima energia potenziale $U_{\text{MAX}} = 4\ mgL = 78.4$ J che viene raggiunta quando $\cos\ \theta = -1$, cioè quando $\theta = \pi$. In tal caso il sistema raggiunge la minima velocità angolare in tale posizione e ruota sempre nello stesso verso. b) L'energia meccanica iniziale è minore di U_{MAX}. In tal caso, il corpo si ferma quando raggiunge un angolo $\theta_m < \pi$ e oscilla periodicamente fra $\theta = \theta_m$ e $\theta = -\theta_m$. L'angolo θ_m è quello in cui l'energia meccanica iniziale eguaglia l'energia potenziale, cioè soddisfa la relazione

$$2mgL(1 - \cos\theta_m) = E_i \qquad \Rightarrow \qquad \theta_m = \arccos\left[\ 1 - E_i/(2mgL)\right] = 1.56\ \text{rad} \qquad (6)$$

Nel nostro caso E_i di eq.(5) è minore di $U_{\text{MAX}} = 78.4$ J e, quindi, il sistema oscilla periodicamente fra i due angoli θ_m e $-\theta_m$ dove raggiunge la velocità angolare minima pari a $\omega = 0$ rad/s.

2.3 – Quando l'angolo è $\theta = 0$, l'energia potenziale è nulla e l'energia meccanica è solo cinetica e pari a

$$E = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2 \qquad (7)$$

Dunque, applicando la conservazione dell'energia ($E = E_i$) si trova che la velocità angolare in questa posizione ($\theta = 0$) è

$$\omega = \sqrt{\frac{2\ E_i}{I}} = 8.52\ \text{rad/s} \qquad (8)$$

Le forze agenti sul sistema barra + sfera sono la forza peso $\boldsymbol{P} = 2\ m\ \boldsymbol{g}$ e la forza incognita $\boldsymbol{F}$ esercitata dall'asse. Per la I equazione Cardinale

$$\boldsymbol{F} + 2\ m\boldsymbol{g} = 2\ m\ \boldsymbol{a} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = 2\ m\ (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}) \qquad (9)$$

Dove $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione del centro di massa del sistema. Il centro di massa compie un moto circolare attorno ad O di raggio L (vedi eq.(1)). L'accelerazione è data, in generale dal contributo centripeto di modulo $a_c = \omega^2\ L$ e da quello tangenziale $a_t = dv/dt$ che è nullo poiché la posizione $\theta = 0$ corrisponde ad una posizione in cui l'energia potenziale è minima (= 0) e, quindi, in tal punto velocità del centro di massa è massima e soddisfa la relazione $dv/dt=0$. L'accelerazione centripeta è un vettore orientato verso il centro O e, quindi, lungo l'asse y nel verso positivo. Conseguentemente la forza F di eq.(9) è diretta lungo l'asse y nel verso positivo ed ha modulo

$$F = 2\, m\, (\omega^2 L + g) = 486 \text{ N} \qquad (10)$$

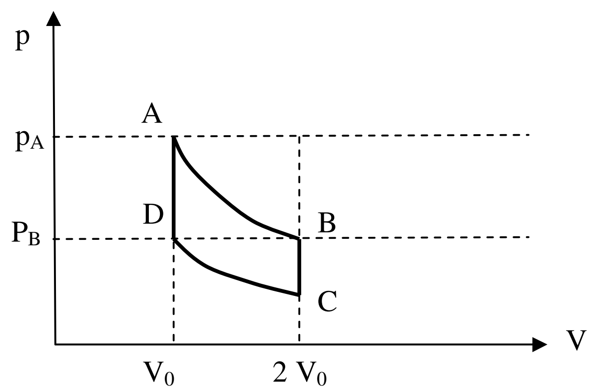
Soluzione Es. 3 - 3.1 – La trasformazione è rappresentata da tratti continui e, quindi, il sistema passa attraverso stati di equilibrio e la trasformazione è reversibile. In ogni punto del ciclo è verificata la legge dei gas perfetti e, quindi, le pressioni in *A* e *B* sono

$$p_A = R\, T_0/V_0 = 12.5 \;\; 10^{3} \text{ Pa} \qquad (1)$$

e

$$p_A = R\, T_0/(2V_0) = 6.25 \;\; 10^{3} \text{ Pa} \qquad (2)$$

Le trasformazioni *AB* e *CD* sono isoterme mentre *BC* e *DA* sono isocore. Il diagramma p,V del ciclo è schematicamente mostrato nella figura sotto riportata.



3.2 – Il calore totale assorbito nel ciclo è pari al lavoro totale. Ma i lavori fatti nei due tratti isocori (*BC* e *DA*) sono nulli, dunque il lavoro viene fatto solamente nei tratti isotermi *AB* e *CD*. In particolare:

$$L_{AB} = RT_0 \ln (V_B/V_A) \;\; = RT_0 \ln 2 \qquad (3)$$

e

$$L_{CD} = [RT_0 \ln (V_D/V_C)] \,/\, 2 \;\; = \;\; - (RT_0 \ln 2)/2 \qquad (4)$$

Dunque, il calore totale è

$$Q = L_{AB} + L_{CD} = \;(RT_0 \ln 2)/2 = 865 \text{ J} \qquad (5)$$