Lezione 2 Analisi dell'errore.

Aritmetica di macchina $\Rightarrow$ genero errori.

(1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{x} \in \mathcal{F}(B, t, m, M)$

$\tilde{x} = fl(x) \qquad \tilde{x} = x \cdot (1 + \epsilon_x) \qquad |\epsilon_x| \le u$

(2) $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{F}(B, t, m, M) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x} + \tilde{y} \\ \tilde{x} - \tilde{y} \\ \tilde{x} \cdot \tilde{y} \\ \tilde{x} / \tilde{y} \end{array}\right. \notin \mathcal{F}(B, t, m, M)$$

$\tilde{x} \oplus \tilde{y} = fl(\tilde{x} + \tilde{y}) \qquad fl(x) = \text{tronc}(x)$

$\text{arrot}(x)$

$\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \text{tron}(\tilde{x} + \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y}) \cdot (1 + \epsilon) \qquad |\epsilon| \le u$

errore locale dell'operaz.

$f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Alg 1:
$x \to x^2$
$x^2 \to x^2 - 1$

Alg 2:
$x \to x - 1 = z$
$x \to x + 1 = w$
$z, w \to z \cdot w$

$f(x) = x^2 - 1$ Algoritmo 1 $g_1(\tilde{x}) = (\tilde{x} \otimes \tilde{x}) \ominus 1$

① $x \rightsquigarrow \tilde{x} = x \cdot (1+\epsilon_x)$ $|\epsilon_x| \le u$

② $\tilde{x} \otimes \tilde{x} = \tilde{x}^2 \cdot (1+\epsilon_1)$ $|\epsilon_1| \le u$

③ $(\tilde{x} \otimes \tilde{x}) \ominus 1 = (\tilde{x}^2 (1+\epsilon_1) - 1)(1+\epsilon_2)$ $|\epsilon_2| \le u$

$$g_1(\tilde{x}) = (\tilde{x} \otimes \tilde{x}) \ominus 1 = (\tilde{x}^2 (1+\epsilon_1) - 1)(1+\epsilon_2)$$

$$= \left(x^2 \cdot (1+\epsilon_x)^2 (1+\epsilon_1) - 1\right) \cdot (1+\epsilon_2)$$

Analisi al I° ordine. (cancellazione)

$$\doteq \left(x^2 \cdot (1+\cancel{\epsilon_x^2}+2\epsilon_x)(1+\epsilon_1) - 1\right)(1+\epsilon_2)$$

$$\doteq \left(x^2 \cdot (1+2\epsilon_x+\epsilon_1) - 1\right)(1+\epsilon_2)$$

$$\doteq x^2 \cdot (1+2\epsilon_x+\epsilon_1+\epsilon_2) - 1(1+\epsilon_2)$$

$$\doteq (x^2-1) + 2x^2\epsilon_x + x^2\epsilon_1 + \epsilon_2 \cdot (x^2-1)$$

$$g_1(\tilde{x}) = f(x) + 2x^2\epsilon_x + x^2\epsilon_1 + \epsilon_2(x^2-1)$$

$$\frac{g_1(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{2x^2}{x^2-1}\epsilon_x + \frac{x^2}{x^2-1}\epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\epsilon_{tot_1} = \frac{g_1(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{2x^2\epsilon_x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x^2-1}\epsilon_1 + \epsilon_2$$

$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $\qquad g_2(\tilde{x}) = (\tilde{x} \ominus 1) \otimes (\tilde{x} \oplus 1)$

$g_2(\tilde{x}) = (x \cdot (1+\epsilon_x) - 1)(1+\epsilon_1) \cancel{x} \left(\cancel{x} (1+\epsilon_x) + 1 \right)(1+\epsilon_2)$
$(1+\epsilon_3)$

$= \left(x^2 \cdot (1+\epsilon_x)^2 - 1 \right)(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3)$

$\doteq \left(x^2 \cdot (1+2\epsilon_x) - 1 \right)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$

$\doteq x^2 \cdot (1+2\epsilon_x+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) - 1 \cdot (1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$

$\doteq f(x) + 2\epsilon_x x^2 + f(x) \cdot (\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$

$\epsilon_{tot_2} = \dfrac{g_2(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}\epsilon_x + \epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3$

$\epsilon_{tot_1} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}\epsilon_x + \dfrac{x^2}{x^2-1}\epsilon_2 + \epsilon_2$

$|\epsilon_x| \le u$

$|\epsilon_1| \le u$

errore mente

(1) $\epsilon_{tot} = \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$

$\epsilon_{in} = \epsilon_{in}(\epsilon_x)$ $\qquad \epsilon_{alg} = \epsilon_{alg}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots)$

QUALE ALGORITMO PREFERIBILE?

$$|\epsilon_{alg_1}| = \left|\frac{x^2}{x^2-1}\epsilon_1 + \epsilon_2\right| \le \left(\frac{x^2}{|x^2-1|} + 1\right)u$$

$$|\epsilon_{alg_2}| = |\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3| \le |\epsilon_1|+|\epsilon_2|+|\epsilon_3| \le 3u$$

Preferibile 2.
- (2) numericamente stabile
- (1) numericamente instabile per certi x

Errore inerente o inevitabile.

$f(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f sufficientemente regolare $(f \in C^2(\mathbb{R}))$

$$\epsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \qquad (f(x) \neq 0)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\epsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \qquad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{x}_i = x_i(1+\epsilon_i)$$

Come calcoliamo l'errore inerente (Formula espansione di Taylor)

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)\cdot(\tilde{x}-x) + f''(\xi)\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2} \qquad \xi \in [\tilde{x}, x]$$

$$\epsilon_m = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{\tilde{x} - x}{x} \cdot x + \frac{f''(\xi)}{f(x)} \left(\frac{\tilde{x} - x}{x}\right)^2 \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} x \cdot \epsilon_x + \frac{f''(\xi)}{f(x)} \frac{x^2}{2} \epsilon_x^2$$

$$\boxed{\epsilon_m \doteq \frac{f'(x)}{f(x)} x \cdot \epsilon_x}$$

Formula che permette il calcolo dell'errore inerente

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$\epsilon_m \doteq \frac{2x}{x^2 - 1} \cdot x \cdot \epsilon_x = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \epsilon_x$$

$$|\epsilon_m| = \left| \frac{2x^2}{x^2 - 1} \epsilon_x \right| \leq \frac{2x^2}{|x^2 - 1|} |\epsilon_x|$$

$$\leq \frac{2x^2}{|x^2 - 1|} u$$

Errore inerente è grande in un intorno di ± 1

$$\epsilon_m = \frac{f'(x)}{f(x)} x \epsilon_x = C_x \epsilon_x \qquad C_x = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

C_x coefficiente di amplificazione.

$|C_x|$ grande ϵ_m è elevato il problema è mal condizionato

$|C_x|$ piccolo ϵ_m è modesto il problema è ben condizionato

$f(x) = x^2 - 1$ calcolo è mal condizionato quando

$$x \simeq \pm 1$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (formula di Taylor per funzioni in più variabili)

$$\epsilon_m \doteq \frac{1}{f(x)} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, x_i \, \epsilon_i \right]$$

$n = 2$

$$\epsilon_m \doteq \frac{1}{f(x,y)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, x \cdot \epsilon_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \, y \, \epsilon_y \right]$$

$f(x,y) = x \pm y \qquad \epsilon_m = \dfrac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}$

$$\epsilon_m \doteq \frac{1}{x \pm y}\left[1\, x\, \epsilon_x \pm 1\, y\, \epsilon_y \right] = \frac{x}{x \pm y}\epsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y}\epsilon_y$$

$C_x = \dfrac{x}{x \pm y} \qquad C_y = \dfrac{\pm y}{x \pm y}$

$f(x,y) = x \cdot y$

$$\epsilon_m \doteq \frac{1}{xy}\left[y \cdot x\, \epsilon_x + x\, y\, \epsilon_y \right] = \epsilon_x + \epsilon_y$$

$C_x = 1 \qquad C_y = 1$

$f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

$$\epsilon_m \doteq \frac{y}{x}\left[\frac{x}{y}\epsilon_x - \frac{x}{y^2}\, y \cdot \epsilon_y \right] = \epsilon_x - \epsilon_y$$

$C_x = 1 \qquad C_y = -1$

Operazioni moltiplicative $\Rightarrow$ ben condizionate

Operazioni additive $\Rightarrow$ possono essere mal condizionate

$x - y \qquad x$ e y concordi e vicini tra loro.

Errore di cancellazione.

$f(x) = x^2 - 1 \qquad x \simeq \pm 1$ e $x \notin F(B, t, m, M)$

errore di condizionamento.

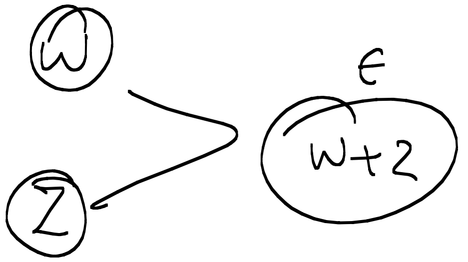
Errore ALGORITMICO

$\epsilon_{alg} = \dfrac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$ $\quad g(\tilde{x})$ funzione effettivamente calcolata in macchina.

ϵ_{alg} associato al lavoro con numeri di macchina (commettendo dovute all'approssimazione di questi numeri $\Rightarrow$ errore inerente)

Costruendo l'algoritmo cambio la funzione g.

<u>Calcolo dell'errore algoritmico</u> $\Rightarrow$ Analisi con il grafo associato.



step intermedio

$|\epsilon| \leq u$

$\tilde{w} = w \cdot (1 + \delta_w)$ $\quad \delta_w$ errore accumulato

$\tilde{z} = z(1 + \delta_z)$ $\quad \delta_z$ errore accumulato nel calcolo di z

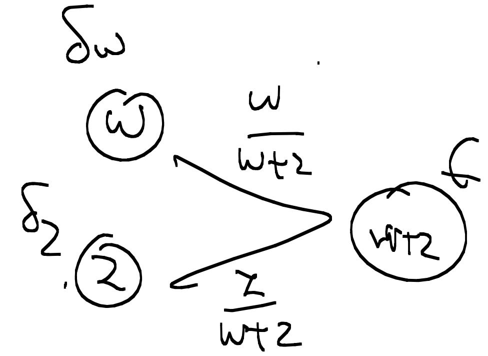
$$\tilde{y} = \tilde{w} \oplus \tilde{z} = \left(w\cdot(1+\delta_w) + z\cdot(1+\delta_z)\right)(1+\epsilon)$$

$$\doteq w\cdot(1+\delta_w+\epsilon) + z\cdot(1+\delta_z+\epsilon)$$

$$\doteq \underbrace{(w+z)}_{y} + w\,\delta_w + z\,\delta_z + \underbrace{(w+z)}_{y}\,\epsilon$$

$$\epsilon_{tot} = \frac{\tilde{y} - y}{y} = \frac{w}{w+z}\,\delta_w + \frac{z}{w+z}\,\delta_z + \epsilon$$

gli errori δ_w e δ_z ~~si~~ sono amplificati tramite dei coefficienti = coefficienti di amplificazione dell'operazione corrispondente



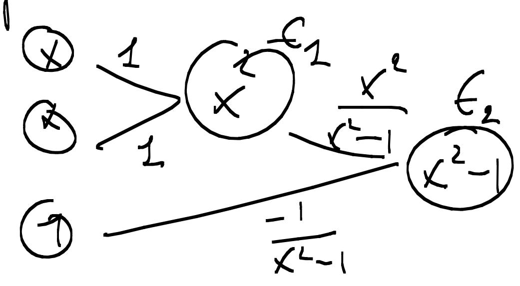
$w+z=y$

$$\tilde{y} = y\cdot(1+\delta_y)$$

$$\delta_y = \frac{w}{w+z}\,\delta_w + \frac{z}{w+z}\,\delta_z + \epsilon$$

utilizzeremo normalmente per calcolare errori δ_w e δ_z

Alg 1 $\quad x \to x^2$, $\quad x^2 \to x^2 - 1$



$$\epsilon_{alg} = \epsilon_2 + \frac{x^2}{x^2-1}\left(\epsilon_1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0\right) + \frac{-1}{x^2-1}\cdot 0$$

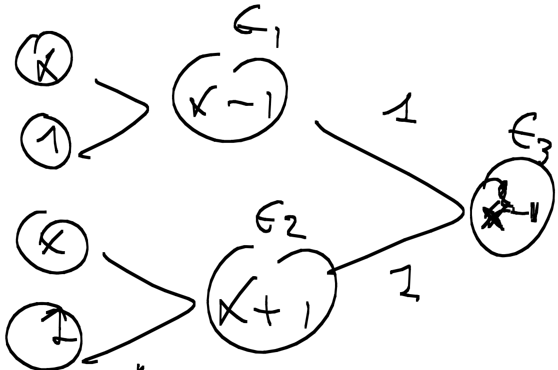
$$= \epsilon_2 + \frac{x^2}{x^2-1}\,\epsilon_2$$

Alg 2

$x \to x-1 = w$

$x \to x+1 = z$

$(z, w) \to z\cdot w$



NO perché non amplificano errori

$$\epsilon_{alg} = \epsilon_3 + 1\cdot\epsilon_1 + 1\cdot\epsilon_2 =$$

$|\epsilon_{alg}|$ è grande l'algoritmo è NUMERICAMENTE INSTABILE

$|\epsilon_{alg}|$ è piccolo l'algoritmo è NUMERICAMENTE STABILE

ALG1 è NUMERICAMENTE INSTABILE PER CERTI X

ALG2 è NUMERICAMENTE STABILE

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

ESERCIZIO

① calcolare ERRORE INERENTE E STUDIARE IL CONDIZIONAMENTO

② CALCOLARE ERRORE ALGORITMICO E STUDIARE LA STABILITÀ DELL'ALGORITMO.

ERRORE TOTALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi$. razionale

$$f(x) \rightsquigarrow f(\tilde{x}) \rightsquigarrow g(\tilde{x})$$

$$\varepsilon_{tot} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

g ABBIAMO

f VOLEVAMO

Teorema: $\varepsilon_{tot} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$

Dim:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} + \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)}$$

$$= \epsilon_m + \underbrace{\frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}}_{\epsilon_{alg}} \cdot \underbrace{\frac{f(\tilde{x})}{f(x)}}_{\epsilon_m + 1}$$

$$= \epsilon_m + \epsilon_{alg} \cdot (\epsilon_m + 1)$$

$$\doteq \epsilon_m + \epsilon_{alg}$$

$f(x) = x^2 + 1$

CONDIZIONAMENTO: $\epsilon_m = \frac{2x}{x^2+1} x \epsilon_x = \frac{2x^2}{x^2+1} \epsilon_x$

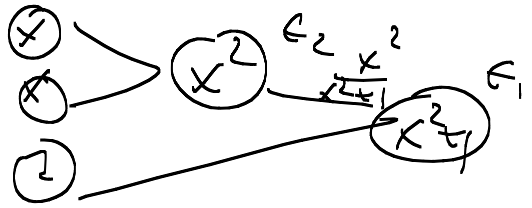
$$|C_x| = \left|\frac{2x^2}{x^2+1}\right| = \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} \leq 2 \cdot 1 = 2$$

$|\epsilon_m| \leq 2u \implies$ Il problema è ben condizionato

STABILITÀ:

$x \to x^2$

$x^2 \to x^2+1$



$$\epsilon_{alg} \doteq \epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2+1}\epsilon_2$$

$$|\epsilon_{alg}| \doteq \left|\epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2+1}\epsilon_2\right| \leq |\epsilon_1| + \left|\frac{x^2}{x^2+1}\right||\epsilon_2|$$

$$\leq u \cdot \left(1 + \frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

$$\leq 2u$$

ALGORITMO NUMERICAMENTE STABILE

f non è razionale es $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = e^x$

CALCOLATORE ESEGUE OPERAZIONI ARITMETICHE

$\Rightarrow$ f DEVE ESSERE APPROSSIMATO CON UNA FUNZIONE RAZIONALE. $h(x)$

$$\epsilon_{analitico} = \frac{f(x) - h(x)}{f(x)}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad h(x) = SQRT(x)$ $\quad$ tc

$x \in F(B,t,m,M)$ $\quad h(x) = SQRT(x) = \sqrt{x}\cdot(1+\epsilon)$

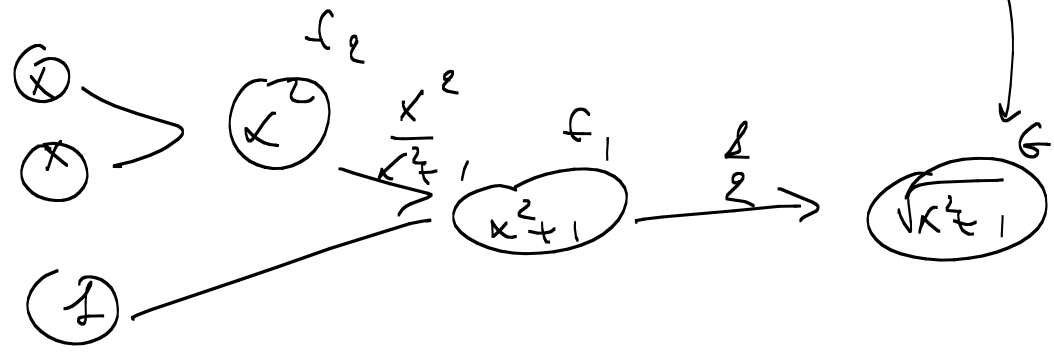
$|\epsilon| \leq u$

$(\leq k u)$

$$\epsilon_{in} = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x \cdot \epsilon_x = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\, \cancel{x} \cdot \epsilon_x = \frac{1}{2}\epsilon_x$$

$C_x = \frac{1}{2}$ ben condizionato

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad SQRT(x) = \sqrt{x}\cdot(1+\epsilon)$



$$\epsilon_{alg} = \epsilon_2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\epsilon_1 + \frac{x^2}{x^2+1}\,\epsilon_2\right)$$

ALGORITMO $\Rightarrow$ ben CONDIZIONATO

$f(x) = \ln(x+1)$ $\qquad$ $h(x) = LN(x) = \ln(x)(1+\epsilon)$

ESERCIZIO SIMULARE CON IL 2° MOMENTO

ESERCIZIO STUDIARE STABILITÀ DELL'ALGORITMO

FINE LEZIONE 2