ESERCITAZIONE CN

$y = 0$

$y = y + 1$

$y = y + x$

$y = y + \frac{x^2}{2}$

$\vdots$

$y = y + \frac{x^n}{n!}$

```
for k=1:n
    y=y+ x^k/fattoriale(k)
end
```

format long: <u>visualizza</u> un numero di cifre superiore (calcoli eseguiti comunque con la stessa precisione)

Numero di operazioni:

```
for k=1:n-1
    y = y + x^k/fattoriale(k)
end
```

Ad ogni iterazione:

1 addizione

1 divisione

1 elevam. a potenza

k moltipl. dentro fattoriale(k)

$3+k$

Per $k=1:n-1$, in totale

$4+5+6+7+\dots+(n+2)$ operazioni.

$$(n-1)\cdot\frac{n+6}{2} = \frac{n^2-n+6n-6}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \text{termini di ordine inferiore}$$

$$\frac{1}{2}(500)^2 \qquad O(n^2)$$

$$\frac{1}{2}n^2 + O(n)$$

$$\frac{1}{2}n^2 + o(n^2)$$

Si può fare con meno operazioni!

Sto ripetendo tante volte le stesse operazioni:

$$100! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100$$

$$101! = \underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100}_{\text{l'ho già fatto, ma non lo sto sfruttando}}\cdot101$$

Idea: riutilizzo $\frac{x^k}{k!}$ per calcolare $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

termine al passo $(k+1)$ = termine al passo $k \cdot \frac{x}{k+1}$

Prima iterazione:

termine $= 1 \cdot \frac{x}{1} = x$

secondo: $x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$

terzo: $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^3}{3!}$

esponenziale2: ad ogni iterazione,

1 molt. 1 div. 1 somma = 3 op.

Per $k=1:n-1$, in totale

$3(n-1) = 3n-3$

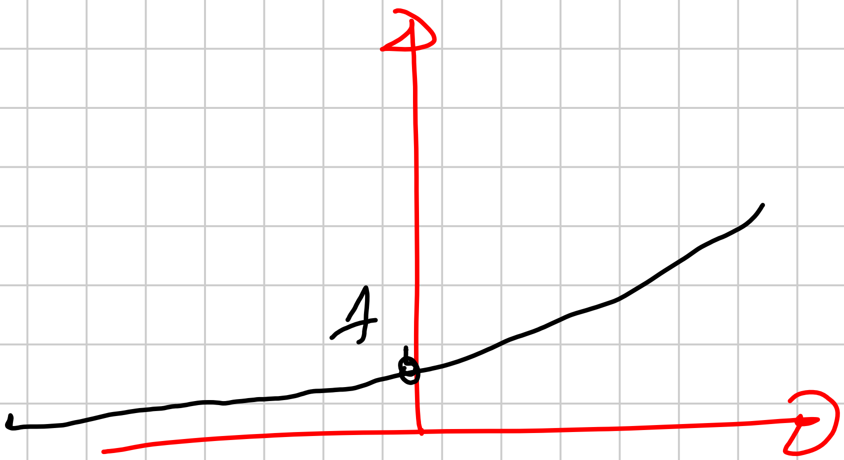
$3n + O(1)$ | $O(n)$

$3n + o(n)$ | non $o(n)$

Ad esempio, per $n = 500$

$$\frac{500^2}{2} \gg 3 \cdot 500$$

(algoritmo con costo quadratico) (costo lineare)



Accuratezza di questo algoritmo?

Per semplicità, analizziamo $1+x+\frac{x^2}{2}$

x viene memorizzato come numero di macchina in $\tilde{x}$

$$\frac{\tilde{x} - x}{x} = \varepsilon \qquad |\varepsilon| \leq u \approx 2 \cdot 10^{-16}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\tilde{x}}{x} - 1 = \varepsilon \qquad \frac{\tilde{x}}{x} = 1 + \varepsilon \qquad \tilde{x} = x(1+\varepsilon)$$

$$\frac{x^2}{2} = \quad x * x / 2$$

$\tilde{x} = x(1+\varepsilon)$

$$fl\left(\frac{x^2}{2}\right) = \tilde{x}^2(1+\varepsilon_1)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\varepsilon_2)$$

$$= \frac{\tilde{x}^2}{2}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$$

$$\tilde{y} = \left((1+\tilde{x})(1+\varepsilon_3) + \frac{\tilde{x}^2}{2}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_4)$$

$$\tilde{y} = \left(\left(1+x(1+\underset{\sim}{\varepsilon})\right)(1+\varepsilon_3) + \frac{x^2(1+\underset{\sim}{\varepsilon})^2}{2}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_4) \qquad y = 1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\tilde{y}-y}{y}$$

$$y = 1+x+\frac{x^2}{2} \rightarrow \tilde{y} = 1+x(1+\varepsilon)+\frac{(x(1+\varepsilon))^2}{2} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\varepsilon\cdot(\text{cose})}_{\text{errore che rende}\,\cdot\, y}$$

$$= \underbrace{1+x+\frac{x^2}{2}}_{y} + \underbrace{\varepsilon\left(x+\frac{x^2}{2}2\right)}_{\text{errore inerente}} + \underbrace{\varepsilon_1\frac{x^2}{2} + \varepsilon_2\frac{x^2}{2} + \varepsilon_3(1+x) + \varepsilon_4\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}_{\text{errore algoritmico}}$$

$$+ \Big(\underbrace{\text{cose con più di un fattore } \varepsilon \text{ o } \varepsilon_i}_{=O(u^2)}\Big)$$

$$|\text{errore alg.}| \leq \left|\frac{x^2}{2}\right| \cdot |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \left|\frac{x^2}{2}\right| + |\varepsilon_3| \cdot |1+x| + |\varepsilon_4| \cdot \left|1+x+\frac{x^2}{2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^2}{2}\right| \cdot u + \left|\frac{x^2}{2}\right| \cdot u + |1+x|\, u + \left|1+x+\frac{x^2}{2}\right| u$$

Rifacendo un discorso analogo per $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^k}{k!}$,

troverei termini del tipo $\left|\frac{x^3}{3!}\right| \cdot u$, $\left|\frac{x^4}{4!}\right| u$, ... ecc.

Se $\underline{x \geq 0}$ tutti questi termini sono minori di e^x

(tutti i termini di $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ sono positivi)

Se $\underline{x \leq 0}$, la serie è a segni alterni, e $\frac{x^k}{k!}$ sono molto più grossi (in valore assoluto) di e^x

$$e^{-30} = 1 + (-30) + \underbrace{\frac{(-30)^2}{2}} + \frac{(-30)^3}{3!} + \dots \approx 9 \cdot 10^{-14}$$

molto più grandi di e^{-30}

Vettori e matrici in Matlab:

$A = [1\ 2\ 3\ ;\ 4\ 5\ 6]$

$[7\ \ 8\ \ 9] * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$ errore!

$+\ ,\ *\ ,$

operazioni elemento per elemento:

$a .* b$ $\quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$a .* b = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{bmatrix}$$

$a;t;b$ = vettore riga

$[a, a+t, a+2t, \ldots \quad]$

si ferma con l'ultimo elemento che non supera b

$a:b$ = stesse cose con $t=1$.

`sum((1:100).^2) =`

somma degli elementi di

$$[1^2, 2^2, 3^2, \dots 100^2]$$

---

size(A) = vettore con dimensioni

size(A,1) = num. righe

size(A,2) = num. colonne

length(v)

zeros(m,n) matrice di zeri

ones

rand(m,n) elementi casuali in [0,1]

eye(n) identità I

det determinante

eig autovalori (eigenvalue)

A(i,j)

⚠ $A(i,j) = k$ fa "crescere" la matrice, se serve.

"preallocare" una matrice:

partire da $A = zeros(n,n)$

anziché far "crescere" la matrice dentro un ciclo for.

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & & 1+n \\ & \ddots & \\ n+1 & & n+n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 2 & 2 & & 2 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\text{ones}(n,1) * (1:n) + (1:n)' * \text{ones}(1,n)}$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & & & \\ L_{n1} & & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$2n^2$ operazioni per $L * v$

(se $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$)