Note Title 2020-03-17

\>> esponenziale(30, 250) = NaN

(Numeri di macchina $= \left\{ B^p \sum_i^t d_i B^{-i} \right\} \cup \{0\}$ $\pm$ Inf NaN)

perché $\dfrac{30^{249}}{249!}$ $\to$ Inf (come numero di macchina) / $\to$ Inf (come numero di macchina)

$$\frac{30^{208}}{208!} \approx \frac{1.7 \cdot 10^{307}}{\mathrm{Inf}} = 0$$

Laplaciano:

```
for i=1:n
    for j=1:n
        ...
    end
end
```

$\rightarrow O(n^2)$ istruzioni eseguite

Oppure:

$L(1,1)=2$	$L(1,2)=-1$	$L(2,1)=-1$
$L(2,2)=2$	$L(2,3)=-1$	$L(3,2)=-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L(n,n)=2$	$L(n-1,n)=-1$	$L(n,n-1)=-1$

```
for k=1:n
    L(k,k)=2
end
```

```
for k=1:n-1
    L(k,k+1)=-1   L(k,k+1)=-1
end
```

→ $O(n)$ istruzioni eseguite

$n + (n-1) + (n-1) = 3n + O(1) = O(n)$ istruzioni

Esercizio: creare una funzione w = prodotto2(v) che restituisce $w = L \cdot v$, dove L è una matrice di Laplace di dimensione opportuna

1) $n = \text{length}(v)$

$L = \text{laplaciano}(L)$

$w = L * v$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

n prodotti
n-1 addizioni

n prodotti
n-1 addizioni

numero di operazioni: n^2 prodotti

$n(n-1)$ addizioni

$2n^2 + O(n)$ operazioni

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & 2 & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 - v_2 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ -v_2 + 2v_3 - v_4 \\ \vdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n \\ -v_{n-1} + 2v_n \end{bmatrix}$$

$-v(k-1) + 2 * v(k) - v(k+1)$

$w(1) = \ldots$ 2 ops

```
for k = 2:n-1
    w(k) = ...
end
w(n) = ...
```

3 ops

2 ops

$O(n)$ operazioni aritmetiche

$$2 + 3(n-2) + 2 = 3n + 2$$

$3n + O(1)$

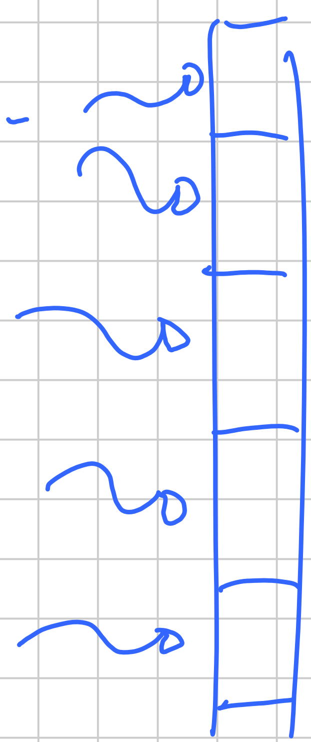
$O(n)$

$v(1,1) = \ldots$

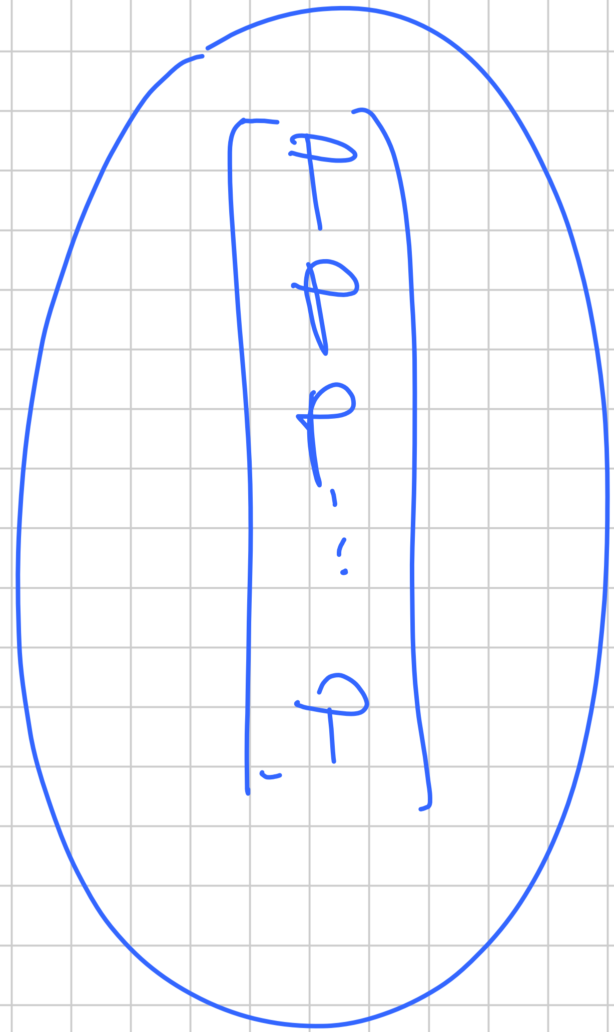
$v(2,1) = \ldots$

$\vdots$

$v(n,1) = \ldots$



matrica(n) =



w = matrice (n) * v w = matrice (n) * v ⋮ w = matrice (n) * v	w = matrice (1) * v w = matrice (2) * v ⋮ w = matrice (v) * v

1a ITERAZIONE:

matrice (1) * v

$$w = [2] * \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p \\ 2p \\ \vdots \\ 2p \end{bmatrix}$$

matrice (2) $* v$

$$W = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix} = \text{errore!}$$

(a meno che $n = 2$)

$$W = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{n \times n} * \underbrace{t\begin{bmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix}}_{n \times 1} = \quad \text{ok!}$$

for i = 1:n

n

w = matrice(n) * v   4 $2n^2 + O(n)$

end

$2n^3 + O(n^2)$ operazioni totale

$$\begin{bmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix}$$

<u>Esempio</u>: errore commesso calcolando una funzione

$x = 0.9991$ $\quad$ $\tilde{x} = 0.999$

$(B = 10,\ t = 3)$

$f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ $\quad$ $f(x)$ $\quad$ $f(\tilde{x})$

$y = f(x)$ $\quad$ $\tilde{y} = f(\tilde{x})$

$$= 1{,}0009 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \leq \underbrace{B^{-t}}_{\text{errore rappresentazione}}$$

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} = 0{,}1001 \simeq 10^{-1}$$

errore relativo su y ≃ errore relativo su x

- numero di condizionamento della funzione

numero di condizionamento di f in x $= \dfrac{x f'(x)}{f(x)}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

numero di condizionamento $= \dfrac{\cancel{x}\,\dfrac{1}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{\cancel{\dfrac{x}{1-x}}} =$

$$= \frac{1}{1-x} \simeq 1{,}111\ldots \cdot 10^{3} \qquad (\text{per } x = 0{,}9991)$$

errore su ~~y~~ $\simeq$ errore su x · numero di cond.

$$0{,}1001 \simeq 1{,}0009 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}1111 \cdot 10^{3}$$

$Ax = b$ $\qquad$ b perturbato in $\tilde{b} = b + f$

$\tilde{x}$ soluzione di $A\tilde{x} = \tilde{b} = b + f$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \qquad k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$7.6271 \cdot 10^{-4} \leq 21 \cdot 2.7273 \cdot 10^{-4}$$

norme matriciali indotte da $\|\cdot\|$

$\|b\|$

$$\|b\|_1 = |b_1| + |b_2| = 11$$

$$\|b\|_\infty = \max(|b_1|, |b_2|) = 6$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{5^2 + 6^2}$$

A\b in Matlab calcola soluzione di un sist. lineare

$$A \backslash b = A^{-1} b$$

$$3 / 5 = \frac{3}{5}$$

$$\|A\|_1 = \max\left(\left\|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\|_1, \left\|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right\|_1\right) = \max(4, 6) = 6$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left(\left\|\begin{bmatrix}-2\\1.5\end{bmatrix}\right\|_1, \left\|\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}\right\|_1\right) = \max(3.5, 1.5) = 3.5$$

$$\|A\|_\infty = \max\left(|3|+|4|, |1|+|2|\right) = 7$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left(|-2|+|1|, |1.5|+|-0.5|\right) = 3$$

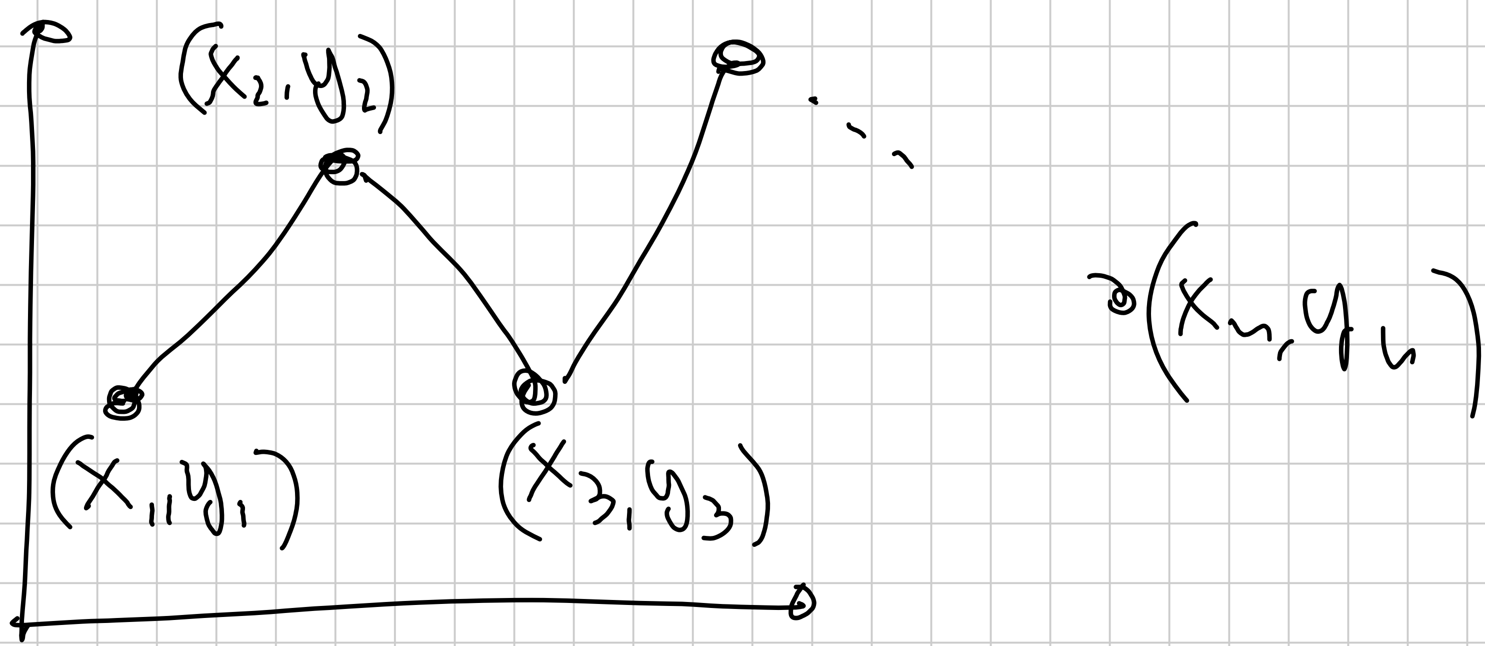
$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq k(A) \cdot \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$$

$$10 \cdot 10^{-4} \leq 2.5 \cdot 10^{5} \qquad 2.8630 \cdot 10^{-4}$$

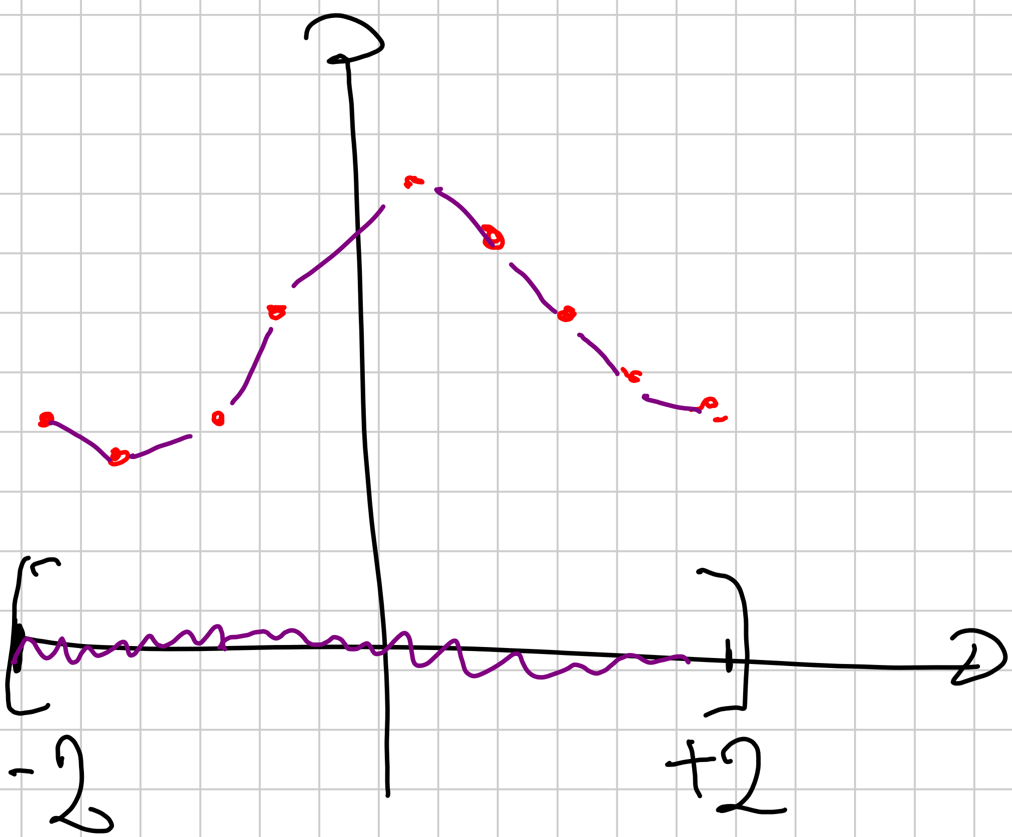
$$1.1 \cdot 10^{-8}$$

Grafici di funzioni:

$$\text{plot}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)$$



$$f(x) = \frac{x^3}{x+5}$$



Tracciare grafici:

1) two file:

```
x = -2:0.01:2
for k = 1:length(x)
    y(k) = funzione(x(k))
end
plot(x,y)
```

```
y = funzione(x)
y = x^3/(x+5)
```

2) "function handle"

```
f = @(x)   x^3/(x+5);
x = -2:0.01:2
```

```
for k=1:length(x)
y(k) = f(x(k))
end
plot(x,y)
```

3)

```
f=@(x) x^3/(x+5);
fplot(f)
```