Teorema di Gershgorin

Esercizio

Sia $a \in \mathbb{R}$. Cosa è possibile concludere usando il teorema di Gershgorin sugli autovalori della matrice $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & a \\ & 1 & & & & 2a \\ & & 1 & & & 4a \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 2^{n-1}a \\ a & 2a & 4a & \cdots & 2^{n-1}a & 1 \end{bmatrix}?$$

Per quali valori di a possiamo dimostrare che la matrice è invertibile?

(gli elementi non visualizzati sono 0).

Soluzione di sistemi triangolari

Scriviamo una function `x = sup_solve(A, b)` che risolve un sistema triangolare superiore.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{A_{44}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - A_{34}x_4}{A_{33}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - A_{23}x_3 - A_{24}x_4}{A_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$

Esempio di sistema triangolare

Sia T_n la matrice $n \times n$ tale che

$$(T_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ -2 & i = j-1, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

$$L_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ad esempio

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(gli elementi non visualizzati sono 0).

Sistemi triangolari

Esercizio

Per $n = 5, 10, 20, 50$, generate x = rand(n, 1), definite $b = T_n x$, e utilizzate la funzione precedente per risolvere il sistema triangolare $T_n x = b$.

Quanto vale $\frac{\|T_n x - b\|_1}{\|b\|_1}$ per le soluzioni x calcolate? Qual è il numero di condizionamento di T_n in norma 1?

Esercizio

Utilizzando Matlab, determinare l'inversa della matrice T_n per $n = 3, 4, 5$.

Sapreste congetturare una formula generale per l'inversa di T_n? Sapreste dimostrare che questa formula funziona?

Esercizio

Scrivete una function x = sup_solve_T(b) che risolve il sistema triangolare $T_n x = b$. Riuscite a scrivere questa funzione utilizzando $O(n)$ operazioni aritmetiche, senza memorizzare esplicitamente la matrice T_n ma vedendo come sono fatte le formule per questo caso particolare?

Esercizio

Scrivete una function x = inf_solve(A, b) che risolve un sistema triangolare *inferiore*.

A_{11} 0 0 0 . . 0
A_{21} A_{12} 0 0 . . 0
A_{31} A_{32} A_{33}