Ricevimento 26/03

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad (\alpha \geq 0)$$

1. autovalori / autovettori
2. molteplicità algebrica e geometrica

$$Ax = \lambda x \qquad / \qquad \det(A - \lambda I)$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & & & \alpha \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la I° riga.

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+1} \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1}\alpha$$

$$= (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n+1}\alpha$$

$$= (-1)^n \left[\lambda^n - \alpha \right] = \det(A - \lambda I)$$

Calcolo gli autovalori

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n - \alpha = 0 \iff \lambda^n = \alpha$$

Equazione con risultati in $\mathbb{C}$ $\left(\cancel{\lambda = \sqrt[n]{\alpha}} \right)$

$$\lambda = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$\lambda^n = \alpha \iff \rho^n \cdot e^{in\theta} = \alpha$$

$$\Rightarrow |\rho^n \cdot e^{in\theta}| = |\alpha|$$

$$\Rightarrow |\rho^n| |e^{in\theta}| = \alpha \Rightarrow \rho^n = \alpha$$

$$\rho^n e^{in\theta} = \alpha \iff \begin{cases} \rho^n = \alpha \iff \rho = \sqrt[n]{\alpha} \\ e^{in\theta} = 1 \end{cases}$$

$$e^{in\theta} = 1 \iff \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1$$

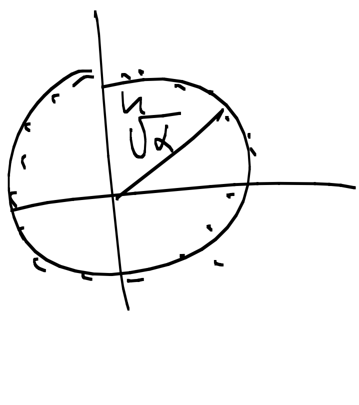
$$\iff \begin{cases} \cos n\theta = 1 \\ \sin n\theta = 0 \end{cases} \iff n\theta = 2k\pi$$

$$\iff \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

$$\theta \in (0, 2\pi] \qquad \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad k = 1 \dots n$$

$$z^n = \alpha \iff z = \sqrt[n]{\alpha}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad k = 1 \dots n$$

n soluzioni distinte



n diagonalizzabile $\Rightarrow$ λ_i ha

$\sigma_i = \tau_i = 1$

CALCOLIAMO UN AUTOVETTORE

autovalore: $\lambda_j = \sqrt[n]{\alpha}\, e^{\frac{i 2\pi j}{n}}$

$j = 1, \dots, n$

autovettore

$A x = \lambda_j x \iff$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha x_n = \lambda_j x_1 \\ x_1 = \lambda_j x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda_j x_n \end{cases}$$

Cerco un vettore $X \neq 0 \Rightarrow \underline{X_n \neq 0}$

autovettori definiti a meno di una costante moltiplicativa

quindi posso assumere $X_n = 1$

$X_n = 1 \qquad X_{n-1} = \lambda_j \qquad X_{n-2} = \lambda_j^2 \ldots$

$X_1 = \lambda_j^{n-1}$

$$\alpha \, X_n = \lambda_j \, x_1$$

$$\underline{\alpha = \lambda_j^n} \qquad \underline{OK}$$

autovettore relativo all'autovalore λ_j

$$V_j = \begin{pmatrix} \lambda_j^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_j \\ 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO INVERSA DI A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \pm(\lambda^n - \alpha)$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm\alpha$$

A è singolare $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0$

A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$

CALCOLO INVERSA PER $\alpha \neq 0$

$$A \cdot B = I \qquad B = A^{-1}$$

$$AB = I \Leftrightarrow A B e_j = I e_j \quad j = 1 \dots n$$

$$\Leftrightarrow A \cdot b_j = e_j \quad j = 1 \dots n$$

Sistemi lineari che definiscono le colonne della matrice inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \\ 1 & \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = e_1 \iff \begin{cases} \alpha x_n = 1 \\ x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \iff x_n = \frac{1}{\alpha}$$

$$Ax = e_2 \iff \begin{cases} \alpha x_n = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \iff x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = e_3 \iff x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\cancel{x} = e_j \iff x = e_{j-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & & & \end{bmatrix}$$

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$= \max\{1, |\alpha|\} \quad \max\{1, \frac{1}{|\alpha|}\}$

Se $|\alpha| \geq 1 \qquad K_\infty(A) = |\alpha|$

Se $|\alpha| \leq 1 \qquad K_\infty(A) = \frac{1}{|\alpha|}$

Risulta malcondizionata

$|\alpha| \to +\infty$

$|\alpha| \to 0$

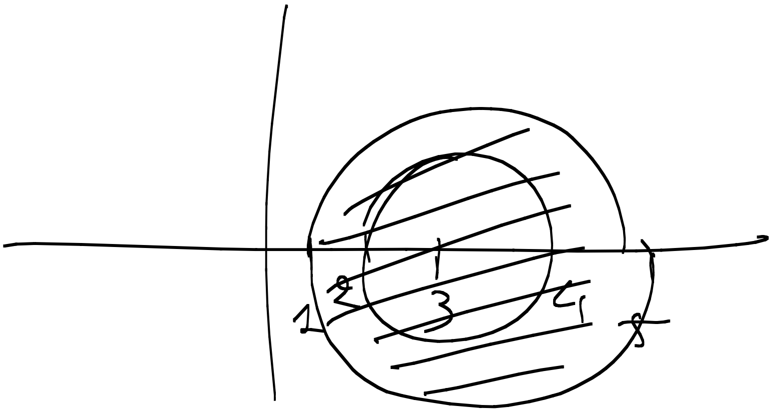
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Stimare il condizionamento

in norma 2

Invertibilità? È INVERTIBILE sì

TEOREMA di GERSCHGORIN



$0 \notin \bigcup K_i \Rightarrow 0$ non è autovalore di A

$\Rightarrow A$ è invertibile !!

$A = A^T \Rightarrow$ gli autovalori sono reali.

$\Rightarrow 1 \leq \lambda \leq 5$

$$\boxed{1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 5}$$

$$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \overset{(A^T = A)}{=} \sqrt{\rho(A^2)}$$

Chi sono gli autovalori di A^2 $\Longrightarrow$ i quadrati degli autovalori di A

Dim: $Ax = \lambda x$ $\quad A^2 x = A \cdot Ax =$

$$= A \cdot (\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 \cdot x$$

gli autovalori di A^2 sono $0 \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_n^2$

$$\rho(A^2) = \lambda_n^2 \Rightarrow \sqrt{\rho(A^2)} = \lambda_n$$

$$\underline{\left(\sqrt{x^2} = |x| \right)} \qquad = \|A\|_2$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-T}A^{-1})} = \quad (A^{-T} = A^{-1})$$

$$= \sqrt{\rho(A^{-1}A^{-1})} = \sqrt{\rho(A^{-2})}$$

chi sono gli autovalori di $\underline{\underline{A^{-1}}}$ $\rightarrow$

sono i reciproci degli autovalori di A

Dim: $Ax = \lambda x \iff \frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x$

gli autovalori di A^{-1} sono $\underline{\underline{\frac{1}{\lambda_n} \le \frac{1}{\lambda_{n-1}} \le \dots \le \frac{1}{\lambda_1}}}$

gli autovalori di A^{-2}: $\frac{1}{\lambda_n^2} \le \frac{1}{\lambda_{n-1}^2} \le \dots \le \frac{1}{\lambda_1^2}$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-2})} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

(per matrici simmetriche definite positive

$A = A^T$ definita positiva e $x^T A x \geq 0$ e
$x^T A x = 0 \iff x = 0$)

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \leq \frac{5}{1} = 5$$

$K_2(A) \leq 5 \Rightarrow A$ è ben condizionata

$A = (a_{ij})$ $\quad a_{ij} = \min(i, j) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

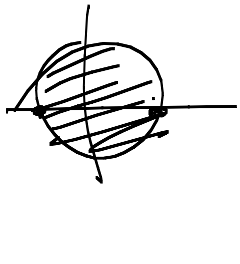
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

INVERTIBILITÀ CON GERSCHGORIN ?

$\cancel{0 \in \bigcup R_i \Longrightarrow A \text{ è singolare}}$

FALSO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$\det A \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2(x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3\cdot(x_3 + x_4) = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3(x_3 + x_4) = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 2x_2 + 3(x_3 + x_4) = 0 \\ {}_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1=0 \\ 3(x_2+x_3+x_4)-x_2=0 \implies x_2=0 \\ 2x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_3+x_4=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ 3x_3+4x_4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3+x_4=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ 4(x_3+x_4)-x_3=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_4=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{unica soluzione è il}$$

vettore nullo $\implies$ **A è invertibile**

(**generalizzazione al caso $n \times n$**) !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & n \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = (1)^n \lambda^n$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (-1)^n \lambda^n = 0 \iff \lambda = 0$$

$\lambda = 0 \quad \sigma = n$ molteplicità geometrica?

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \dim \operatorname{Ker} A$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n}$$

$\dim \operatorname{Im} A =$ numero di righe o colonne linearmente indipendenti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

le prime $n-1$ colonne sono linearmente indipendenti $e_2 \dots e_n$

$$n - 1 = \dim \operatorname{Im} A$$

$$(n-1) + \dim \operatorname{Ker} A = n \Rightarrow$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = \underline{1} \qquad \underline{\underline{T = 1}}$$