

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
A.A. 2013/2014 – Appello 12/06/2014

NOME

COGNOME

MATRICOLA

**Esercizio 1** Si consideri la matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ -1 & \text{se } i = j - 1; \\ \rho & \text{se } i = n \text{ e } j = 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che  $A$  ammette fattorizzazione LU  $\forall \rho \in \mathbb{R}$ .

2. Dimostrare che per il fattore triangolare superiore  $U = (u_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si ha

$$u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ e } i < n; \\ 1 + \rho & \text{se } i = j = n; \\ -1 & \text{se } i = j - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Determinare per quali valori del parametro  $\rho \in \mathbb{R}$  la fattorizzazione LU è unica.

4. Scrivere una funzione Matlab<sup>®</sup> che dati in input  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  implementa un processo di sostituzione all'indietro e restituisce in output il vettore  $\mathbf{z}$  soluzione del sistema lineare

$$U\mathbf{z} = \mathbf{ones}(n, 1).$$

5. Valutare il costo aritmetico dell'algoritmo.

6. Per  $n = 200, 400, 800$  e  $\rho = -0.99$  riportare l'errore relativo

$$\epsilon_n = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1},$$

ove  $\mathbf{x} = [n-1 : -1 : 0]^T + \frac{1}{1+\rho} * \mathbf{ones}(n, 1)$  e  $\mathbf{z}$  è la soluzione del sistema ottenuta con la procedura implementata al punto precedente.