LEZIONE 06/04

(A) CALCOLO DELLA FATTORIZZAZIONE LU

$$A = LU \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

MATRICI ELEMENTARI DI GAUSS

DEF: $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice elementare di Gauss se $\exists\, k$ con $1 \leq k \leq n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$ tale che

$$E = I + v e_k^T$$

$n = 3 \quad k = 1 \quad v_1 = 0$

$$E = I + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

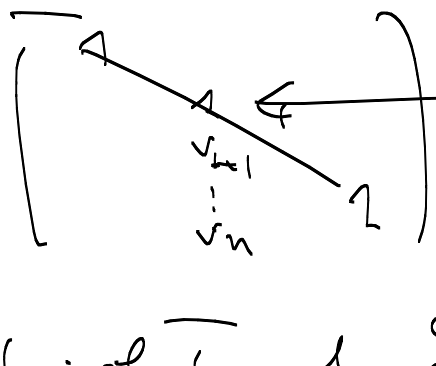
$n = 3 \quad k = 2 \quad v_1 = v_2 = 0$

$$E = I + \begin{bmatrix}0\\0\\v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & v_3 & 1\end{bmatrix}$$

$n=3 \quad k=3 \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$

$$E = I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice elementare di Gauss se E triangolare inferiore con elementi diagonali $= 1$ con elementi eventualmente $\neq 0$ solo in una colonna sotto l'elemento diagonale.



k-esima posizione.

Proprietà matrici elementari di Gauss

① $E = I + v e_k^T \quad (v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0)$

è invertibile $\quad E^{-1} = I - v e_k^T$

Dim: $(I + v e_k^T)(I - v e_k^T) = I$

$$I - \cancel{v e_k^T} + \cancel{v e_k^T} - v e_k^T v e_k^T =$$

$$I - \quad = I - v (e_k^T v) e_k^T$$

$$e_k^T v = v_k = 0 \qquad = I$$

② Teorema. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{x_k \neq 0}$

$\exists\, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice elementare di Gauss t.c.

$$E x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dim: $\quad E = I + v e_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(I + v e_k^T)\, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(I + v e_k^T)\, x = x + v(e_k^T x) = x + x_k v$$

determin. v con $v_1 = v_2 = \cdots = v_k$ tale che

$$x + x_k v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_k v_{k+1} \\ \vdots \\ x_k v_n \end{bmatrix}}} = x_k v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_{k+1} \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}}}$$

$$v_j = -\frac{x_j}{x_k} \qquad j = k+1 : n$$

$\boxtimes$

(3) Ax $\quad \underline{O(n^2)}$ flops in generale

$$Ex \qquad E = I + v e_k^T$$

$$O(n) \ \underline{ops}$$

$$E = I + v e_k^T \qquad Ex = (I + v e_k^T)x$$

$$= x + x_k \cdot v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} + x_k v_{k+1} \\ \vdots \\ x_n + x_k v_n \end{bmatrix}$$

$n-k$ operazioni moltiplic.

$n-k$ operazioni addizioni $\qquad \underline{O(n)}$ ops

CALCOLO DELLA FATTORIZZAZIONE LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

(1) Supponiamo che $a_{11}^{(0)} \neq 0$. ~~Determino~~ $E_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$E_1 = I + v e_1^T$ t.c.

$$E_1 \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_j = -\frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \qquad j = 2 : n$$

$$E_1 A^{(0)} = A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ v_2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{1j}^{(0)} = a_{1j}^{(1)} \qquad j = 1 \ldots n$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} v_i \cdots 1 \; 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{nj}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= v_i \, a_{1j}^{(0)} + a_{ij}^{(0)}$$

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = \left(- \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \right) a_{1j}^{(0)} + a_{ij}^{(0)} \qquad i = 2 : n \quad j = 2 : n}$$

$$- \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \qquad i = 2 \ldots n$$ moltiplicatori di Gauss

- calcolo i moltiplicatori di Gauss $O(n)$
- aggiornare gli elementi di A $(n-1)^2$ operaz. moltiplic.

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = E_1 A^{(0)}$$

Costo $O(n^2)$ operazioni aritmetiche

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} = E_1 A^{(0)}$$

- Assumiamo che $a_{22}^{(1)} \neq 0$

Possiamo allora determinare E_2

$$\left(\begin{array}{c} a_{kk}^{(k-1)} \\ \underline{\underline{\text{pivot}}} \end{array} \right)_{k=1,\dots,n-1}$$

elementi pivotali

$$E_2 = I + v e_2^T$$

t.c.

$$E_2 \begin{bmatrix} a_{12}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = E_2 A^{(1)} = E_2 E_1 A^{(0)}$$

$A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)}$ $(n-2)^2$ op. molt.

$2(n-2)^2$ op. addiz.

$O(n^2)$ op. addiz.

. . . . se $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ $k = 1 \dots n-1$

$$E_{n-1} \dots E_1 A^{(0)} = A^{(n-1)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Triangolare superiore e quindi $\underline{\underline{A^{(n-1)} = U}}$

$$E_{n-1} \dots E_1 A^{(0)} = U$$

$$A = \underbrace{E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}}\, U$$

$$L = E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}$$

L prodotto di matrici triangolari inferiori con 1 sulla diagonale principale

= matrice triangolare inferiore con elementi = 1 sulla diagonale principale

$$\underline{A = LU} \quad \text{fattorizzazione } LU \text{ di } A$$

Per descrivere L in maggior dettaglio.

$$L = E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}$$

$$= (I - v_1 e_1^T) \cdot (I - v_2 e_2^T) \cdots (I - v_{n-1} e_{n-1}^T)$$

$n=4 \qquad L = (I - v_1 e_1^T)(I - v_2 e_2^T)(I - v_3 e_3^T)$

$$= \left(I - v_1 e_1^T - v_2 e_2^T + v_1 (e_1^T v_2) e_2^T\right)(I - v_3 e_3^T)$$

$$= \left(I - v_1 e_1^T - v_2 e_2^T\right)(I - v_3 e_3^T)$$

$$= I - v_3 e_3^T - v_1 e_1^T + v_1 \cancel{(e_1^T v_3)} e_3^T$$

$$- v_2 e_2^T + v_2 \cancel{(e_2^T v_3)} e_3^T$$

$$= I - v_1 e_1^T - v_2 e_2^T - v_3 e_3^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -v_2^{(1)} & 1 & & \\ -v_3^{(1)} & -v_3^{(2)} & 1 & \\ -v_4^{(1)} & -v_4^{(2)} & -v_4^{(3)} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice L si ottiene direttamente dai moltiplicatori di Gauss controllo di segno

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$A_1 = [1] \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists!\ LU \text{ di } A$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad a_{11}^{(0)} = 1 \neq 0$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad a_{22}^{(1)} \neq 0 \\ = 1$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = A^{(2)} = U$$

$$E_2 E_1 A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = E_1^{-1} E_2^{-1} U = LU$$

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

CALCOLATA LA FATTORIZZAZIONE LU DI A
CON COSTO $\underline{O(n^3)}$ operazioni aritmetiche

IPOTESI: $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad k=1 \dots n-1$

PER IL CALCOLO

CONDIZIONE SUFFICIENTE $\underline{\det A_k \neq 0}$
$k=1 \dots n-1$

SE $\det A_k \neq 0 \quad k=1 \dots n-1 \Rightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$
$k=1 \dots n-1$

per induzione su k

Idea della dimostrazione:

- se $\det A_1 = [a_{11}^{(0)}] \neq 0 \Rightarrow a_{11}^{(0)} \neq 0$

e quindi il primo passo è applicabile

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$E_1 A^{(0)} = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Cosa implica per la sottomatrice principale di testa di ordine 2 di $A^{(1)}$?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v_2 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$\left(\text{sottomatrice principale di testa di ordine 2 di } E_1\right) \times \left(\text{sottomatrice principale di testa di ordine 2 di } A^{(0)}\right) = $ ——

$$1 \cdot \det A_2 = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)}$$

$$= a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)}$$

Se $\det A_2 \neq 0 \Rightarrow a_{22}^{(1)} \neq 0$

e... questo passo procede con il secondo passo

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$Ax = b$ (A invertibile)

1. Calcolare fattorizzazione LU di A $\quad A = LU$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

2. Algoritmi di sostituzione all'indietro

$$Ax = b \quad (A \text{ invertibile})$$

$$A^{(0)}x = b^{(0)}$$

$$E_1 A^{(0)} x = E^{(1)} b^{(0)}$$

Sistema lineare equivalente
(x è ancora soluzione e la soluzione è unica)

$$A^{(0)}x = b^{(0)} \longrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$$

$$\rightarrow \ldots \ldots \longrightarrow A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow Ux = b^{(n-1)}$$

Sostituzione all'indietro

Processo di Eliminazione di Gauss
o eliminazione gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A^{(0)} x = E_1 b^{(0)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

fase risolvi con sostituzione all'indietro e trova X
$O(n^3)$ operazioni aritmetiche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 = b_1^{(0)} \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2^{(0)} \\ 0x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b_3^{(0)} \end{cases}$$

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 = b_1^{(1)} \\ 0x_1 + x_2 - x_3 = b_2^{(1)} \\ 0x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b_3^{(1)} \end{cases}$$

COME APPLICARE IL SISTEMA PER UNA GENERICA MATRICE INVERTIBILE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ invertibile ma non ammette fattori LU

E_1 ?

Tecniche pivoting: tecniche per scambiare righe e/o colonne

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$ invertibile.

$a_{11}^{(0)}$ potrebbe essere zero? Sì:

Sicuramente $\exists\ J$ t.c. $a_{J1}^{(0)} \neq 0$

$=$ determino $|a_{J1}^{(0)}| = \max\limits_{k=1..n} |a_{k1}^{(0)}|$

$=$ scambio J-esima riga con la prima

$$A^{(0)} \longrightarrow \begin{array}{c} \to \\ \\ J \to \end{array} \begin{bmatrix} a_{J1}^{(0)} \cdots a_{Jn}^{(0)} \\ \\ a_{11}^{(0)} \cdots a_{1n}^{(0)} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$= P_1 A^{(0)}$ $\quad P_1$ matrice di permutazione

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = E_1 P_1 A^{(0)}$$

$A^{(1)}$ invertibile

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$a_{22}^{(1)} = 0$ si è possibile.

$\exists\, J$ t.c. $\left|a_{J2}^{(1)}\right| = \max_{k=2 \dots n} \left|a_{k2}^{(1)}\right| \neq 0$

se $a_{22}^{(1)} = \dots = a_{n2}^{(1)} = 0 \Rightarrow A^{(1)}$ sarebbe

singolare

(I° e II° colonna linearmente dipendenti)

- - - -

$$\underbrace{E_{n-1}P_{n-1} \cdots\cdots E_2P_2E_1P_1}_{L^{-1}} A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = L U$$

L non è triangolare inferiore

È stesso risolvi il sistema lineare

$$A^{(0)} x = b^{(0)}$$

$$E_1 P_1 A^{(0)} x = E_1 P_1 b^{(0)}$$

$$- \; - \; - \; - \; -$$

$$U x = b^{(n-1)}$$

Es:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\left(\underrightarrow{a_{11}^{(0)} \neq 0} \right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1-\frac{5}{8} \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

$U =$

$$E_2 P_2 E_1 P_1 A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = \underbrace{P_1^{-1} E_1^{-1} P_2^{-1} E_2^{-1}}_{L} U$$

$$A^{(0)} x = b^{(0)}$$

$$P_1 A^{(0)} x = P_1 b^{(0)}$$

$$E_1 P_1 \cdot A^{(0)} = E_1 P_1 b^{(0)}$$

$$\ldots$$