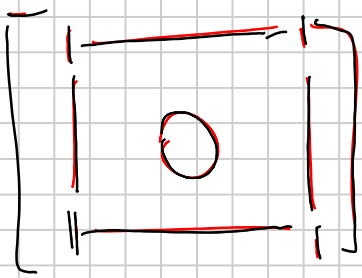
Note Title 2020-04-07



$n \geq 3$

Se sott. di testa invertibili

$\Leftrightarrow$ esiste ed è unica la fatt. LU

non è vero che esiste una fatt. LU

$\Rightarrow$ o non esiste

o ne esiste più di una (infinite)

$n=5$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$ sono fatt. LU $\forall \alpha$

$n=6$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & \vdots & 1 & & & \\ 1 & \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 0 & & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$$

Congettura: $\forall n$, queste sono (infinite) fattorizzazioni LU:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \\ \vdots & 1 & & \ddots & & \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \qquad L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(per $n \geq 4$, almeno)

elementi in rosso: prodotto tra una riga (centrale) di L per colonna centrale della U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(fatt. LU per $n=3$)

Unica! per il teorema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ Elim. di Gauss produce $$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} II - 4 \cdot I \\ III - 7 \cdot I \end{matrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_1 \cdot A = A_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{L_2 \cdot L_1}_{\text{triang. inf.}} A = \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}}_{\text{triang. sup} = U}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Thomas

$$A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{\text{triang. inf. } L} \cdot U$$

Esercizio

Trovare la fattorizzazione LU (tramite matrici elementari di Gauss) della matrice *tridiagonale*

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \vdots \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

(al solito, gli elementi non scritti sono 0).

Scrivere una

function [alphaL, betaU, gammaU] = lutridiag(alpha, beta, gamma)

che, dati in input i tre vettori α, β, γ, restituisce tre vettori che contengono gli elementi non-nulli della fattorizzazione LU in un formato analogo.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & 0 \\ & \gamma_2 & \alpha_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Primo passo el. Gauss:

$$\text{II riga} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\,\text{I riga}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\gamma_1/\alpha_1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat\alpha_2 & \beta_2 & & \\ \hline & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}}_{A_1}$$

$El.(2,1)$: $-\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1}\alpha_1 + \gamma_1 = 0$

$El(2,2)$: $-\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1}\beta_1 + \alpha_2 =: \hat\alpha_2$

$El(2,3)$ $-\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1}\cdot 0 + \beta_2 = \beta_2$

$$\hat\alpha_2 = \alpha_2 - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\beta_1$$

$$\text{III riga} \leftarrow \text{III riga} - \frac{\gamma_2}{\hat\alpha_2}\,\text{II riga}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\gamma_2/\hat\alpha_2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat\alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \hat\alpha_2 & \beta_2 & 0 \cdots & 0 \\ & 0 & \hat\alpha_3 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}}_{A_2}$$

$El.(3,2)$ $-\dfrac{\gamma_2}{\hat\alpha_2}\hat\alpha_2 + \gamma_2 = 0$

$El.(3,3)$: $-\dfrac{\gamma_2}{\hat\alpha_2}\beta_2 + \alpha_3 =: \hat\alpha_3$

$El(3,4)$: β_3

$$\hat\alpha_3 = \alpha_3 - \frac{\gamma_2}{\hat\alpha_2}\beta_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & -\gamma_k/\hat\alpha_k & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \hat\alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & \hat\alpha_k & \beta_k & 0 \cdots & 0 \\ & & \gamma_k & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}}_{A_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ & \hat\alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \hat\alpha_k & \beta_k \\ & & & & \hat\alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \\ & & & & \gamma_{k+1} & \alpha_{k+2} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{A_{k+1}}$$

← k-esima riga

← (k+1)-esima riga

$$\hat\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1} - \frac{\gamma_k}{\underbrace{\hat\alpha_k}_{\neq 0}}\beta_k$$

Dopo n passi,

$$\underbrace{L_{n-2}\cdots L_3 L_2}L_1 A$$

$$\ldots = L_{n-2}L_{n-3}A_{n-3} = L_{n-2}A_{n-2} = A_{n-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ & \hat\alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \beta_n \\ & & & & \hat\alpha_n \end{bmatrix}}_{U}$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \hat\gamma_1 & 1 & & & \\ & \hat\gamma_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \hat\gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L}$$

$$\boxed{\hat\gamma_k = \frac{\gamma_k}{\hat\alpha_k}} \quad (\text{ponendo } \hat\alpha_1 = \alpha_1)$$

Elim. Gauss / fatt. LU per matrici tridiagonali:

$\hat\alpha_1 = \alpha_1$

for

$\hat\gamma_k = \gamma_k / \hat\alpha_k$

$\hat\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1} - \hat\gamma_k \beta_k$

end

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

È vero che la funzione restituisce L, U tali che $L \cdot U = A$?

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat\gamma_1 & 1 & 0 \\ 0 & \hat\gamma_2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \hat\alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \hat\alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \hat\alpha_3 \end{bmatrix}$$

Con una fattorizzazione LU, possiamo risolvere sistemi lineari.

$Ax = b \qquad A = LU \qquad L\underbrace{Ux}_{y} = b \qquad \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

① Calcolo y risolvendo $Ly=b$ a triang. inferiore (sost. in avanti)

② Calcolo x risolvendo $Ux=y$ a triang. superiore (sost. all'indietro)

Sia ① che ② diventano più facili per matrici tridiagonali.

$Ly=b$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \hat{\gamma}_1 & 1 & & \\ & \hat{\gamma}_2 & \ddots & \\ 0 & & \hat{\gamma}_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = b_1 \\ \hat{\gamma}_1 y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \hat{\gamma}_1 y_1 \\ \hat{\gamma}_2 y_2 + y_3 = b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \hat{\gamma}_2 y_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{n-1} y_{n-1} + y_n = b_n \Rightarrow y_n = b_n - \hat{\gamma}_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \beta_1 & & 0 \\ & \hat{\alpha}_2 & \beta_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \hat{\alpha}_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_{k-1} = \frac{y_{k-1} - \beta_{k-1} x_k}{\hat{\alpha}_{k-1}}$$

$$\hat{\alpha}_{n-1} x_{n-1} + \beta_{n-1} x_n = y_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - \beta_{n-1} x_n}{\hat{\alpha}_{n-1}}$$

$$\hat{\alpha} x_n = y_n \Rightarrow x_n = y_n / \hat{\alpha}_n$$

Scrivere x= solveUbidiag(alphahat, beta, y)

Costo computazionale:

LUtridiag: 3 op $\times$ $n-1$ $\quad 3n + O(1)$

solveLbidiag: 2 op $\times$ $n-1$ $\quad 2n + O(1)$

solveUbidiag: 3 op $\times (n-1)$ + 1 op $\quad 3n + O(1)$

Totale: (solvetridiag): $8n + O(n)$

(Elim. di Gauss / fatt. LU / soluzione di sist. lineari su una matrice senza questa struttura costerebbe $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$)

Oss: se devo risolvere anche un altro sistema $Ax=c$

oltre a $Ax=b$, allora la prima parte (calcolo di $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$) non dipende dal termine noto, posso farla una volta sola.

Esercizio: scrivere codice per fattorizz. LU e soluzione sistemi lineari per matrici di forma (facile)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & \beta_1 \\ & \alpha_2 & & 0 & & \beta_2 \\ & & \alpha_3 & & & \beta_3 \\ & 0 & & \alpha_4 & & \vdots \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

(matrici a freccia)

"matrice a freccia ↘"

Domanda interessante: se invece avete una matrice del tipo

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \\ \gamma_1 & \alpha_2 & & & \\ \gamma_2 & & \ddots & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \gamma_{n-1} & & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

come mai è più complicato fare elim. di Gauss / fatt. LU è più complicato?

"matrice a freccia ↖"

SolveU b.diag:

$$x_{k-1} = \frac{(y_{k-1} - \beta_{k-1} x_k)}{\hat{\alpha}_{k-1}} \qquad k=n, n-1, \dots 2$$

primo elemento calcolato: x_{n-1} ultimo: x_1

In entrambi i casi: $n-1$ iterazioni

$$x_k = \frac{y_k - \beta_k x_{k+1}}{\hat{\alpha}_k} \qquad k = n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1$$

primo el. calcolato: x_{n-1} ultimo: x_1