RICEVIMENTO 16/04

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \end{bmatrix}$$

Dimostrare che A ammette fattorizzazione LU usando un criterio alternativo determinante

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \end{bmatrix} \qquad k = 1 \dots n-1$$

<u>$\det A_k$</u> : sviluppo con Laplace secondo l'ultima colonna.

$$\det A_k = (-1)^{k+1}\, 2 \det \begin{bmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1}\, 2 \cdot (-1)^{k} = (-1)^{2k+1} \cdot 2$$

$$= -2$$

$\Rightarrow$) $\det A_k \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$

$\exists !$ fattorizzazione LU di A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$a_{11}^{(0)} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ posso fare il primo passo

$A \to A^{(1)} = E_1 A.$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 \cdots & 1 \\ & -1 & \ddots \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$a_{22}^{(1)} = 1 \neq 0$ posso fare il II° passo.

$$A^{(1)} \to A^{(2)} = E_2 A^{(1)}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \vdots & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Se iteriamo la stessa struttura della procedura quindi tutti i passi fino ad esso effettuati

$$U = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

chi sono gli autovalori e quali sono le loro molteplicità.

A è singolare $\iff$ 0 è autovalore.

$$\dim \operatorname{Imm}(A - \sigma I) + \dim \operatorname{Ker}(A - \sigma I) = n$$

$\sigma = 0$

$$\dim \operatorname{Imm} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$$

$$\begin{array}{c} \| \\ 1 \end{array} \implies \dim \operatorname{Ker} A = n-1$$

molteplicità geometrica $= \underline{n-1}$

$A = A^T$ <u>simmetrica</u> $\implies$ diagonalizzabile.

$$\sigma = r = n-1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = n}$ $\quad \sigma = T = 1$

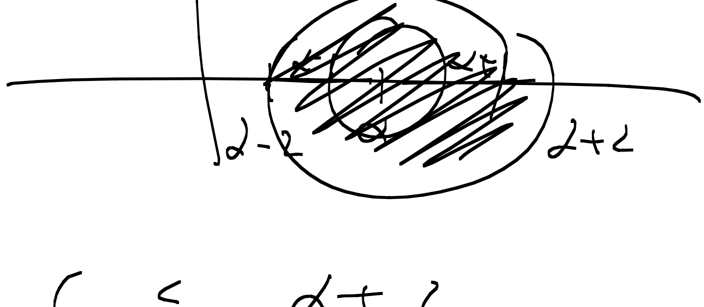
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha > 2$$

autovalori di A ?

Condizionamento di A in norma 2 ?

$A = A^T \Rightarrow$ simmetrica e gli autovalori sono reali

Gershgorin



$$\alpha - 2 \le \lambda \le \alpha + 2$$

$\underline{\alpha - 2 > 0}$ gli autovalori sono positivi

δ autovalore di A

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \delta I) + \underline{\dim \operatorname{Im}(A - \delta I)} = n$$

$$A - \delta I = \begin{bmatrix} \alpha - \delta & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & \alpha - \delta \end{bmatrix}$$

$$(A - \delta I)(2:n,\ 1:n-1) = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Im}(A - \delta I) = n - 1$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - \delta I) = 1$$

$\sigma = \underline{\tau = 1}$ per ogni autovalore.

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)}$$

$$= \sqrt{\lambda_{max}^2} = \lambda_{max}$$

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \le \frac{\alpha+2}{\alpha-2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & O & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(1) fattorizzazione LU ?

② autovalori di A ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ -1 & & \ddots & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sono già matrici triangolari superiori.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & ? & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Una fattorizzazione $\underline{LU}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \lambda I$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcola $\underline{R \text{ per la norma euclidea}}$! $\underline{\text{Conviene}}$!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0 \Rightarrow 0$ è autovalore.

$\dim \operatorname{Im} A = 2 \Rightarrow \dim \ker A = n-2$

0 autovalore con molteplicità algebrica e geometrica $= n-2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ (sto cercando gli autovalori non nulli)

$x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1}$

$x_1 = x_n$

autovettori sono fatti

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ \vdots \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2t + (n-2)s = \lambda t \\ 2t = \lambda s \end{cases}$$

$$s = \frac{2t}{\lambda}$$

$$2t + (n-2)\frac{2t}{\lambda} = \lambda t$$

$\underline{t \neq 0}$ $\quad$ ($t = 0 \Rightarrow s = 0$ ~~nullo~~ autovettori)

$$2 + \frac{2(n-2)}{\lambda} = \lambda$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Meglio è trovi i momenti e contati con nulli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = u \cdot v^T + z w^T \cdots$$

$$A = M - N$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

$$M - N = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha & \cdots & -\alpha & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & -\alpha & -1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-x & -x & -x & -1 \\ 1 & 1-x & -x & -1 \\ 1 & 1 & 1-x & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} |1-x| > 2|x| + 1 \\ |1-x| > |x| + 2 \\ |1-x| > 3 \end{cases}$$

. . . . –

$$\begin{bmatrix} 1 & \theta & \cdots & \theta \\ \theta & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \theta & & & n \end{bmatrix}$$

per quali θ A è invertibile.

$$1 > (n-1)|\theta|$$

$$1 > |\theta|$$

$$|\theta| < \frac{1}{n-1} \qquad |\theta| < 1$$

$$|\theta| < \frac{1}{n-1} \iff -\frac{1}{n-1} < \theta < \frac{1}{n-1}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \theta & \cdots & \theta \\ -\theta & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\theta & & & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & & & -\theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\theta \\ \theta & \cdots & \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & -\theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & -\theta \\ \theta & \cdots & \theta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \theta \cdots \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \begin{matrix} -\theta \\ \vdots \\ -\theta \end{matrix} \\ 0 & 1+(n-1)\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 + (n-1)\theta^2 \neq 0 \quad \forall \theta$$

A è invertibile $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A singolare

LU $\quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

$$A = LU$$

$$\mathrm{Im}(A) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ con } Ax = z \}$$

$$z = Ax \iff z = L \cdot Ux$$

$$z = L \cdot \begin{bmatrix} x_1 + x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_n \\ x_1 + x_2 + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} x_1 + x_n \\ x_1 + x_2 + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{bmatrix} \qquad \text{quindi } \underline{z_{n-1} = z_n}$$

Se prendo un z con le ultime 2 componenti uguali posso trovare $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax = z$

$$\begin{cases} x_1 + x_n = z_1 \\ x_1 + x_2 + x_n = z_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = z_{n-1} \end{cases}$$

$\underline{x_n = 0}$

$$\operatorname{Im}(A) = \{ z \in \mathbb{R}^n : \quad z_{n-1} = z_n \}$$