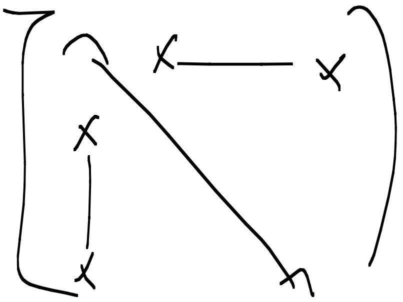
Metodi Iterativi

$Ax = b$ $\quad$ A invertibile $\quad$ A sparsa

A sparsa = molti elementi sono nulli

$A =$ 

$nnz(A) << n^2$

$nnz(A) = O(n)$

$O(n \log^p n)$

$O(n \cdot \sqrt{n})$

Metodo di eliminazione gaussiana = metodo diretto
= numero finito di passi otteniamo la soluzione del sistema.

Metodi iterativi: costruiamo una successione
$\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}}$ gli ottavi tali che $x^{(k)} \longrightarrow x$
soluzione del sistema lineare.

Criterio di arresto: quando mi devo fermare.

$$\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}} \qquad x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

Def: $\{ x^{(k)} \}_{k \in \mathbb{N}}$ $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$

$$\iff \lim_{k \to +\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

Qualsiasi norma ok (EQUIVALENZA TOPOLOGICA)

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty = \max_{j=1\cdots n} |x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

$$|x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \qquad j=1\cdots n$$

$$0 \le |x_j^{(k)} - x_j| \le \max_{j=1\cdots n} |x_j^{(k)} - x_j|$$

$Ax = b \qquad A = M - N$

M invertibile.

$$Ax = b \iff (M-N)x = b$$

$$\iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\iff x = Px + q$$

$P = M^{-1} N \qquad \underline{q} = M^{-1} b$

$$\boxed{Ax = b} \iff \boxed{\begin{array}{c} x = Px + \underline{q} \\ P = M^{-1}N \quad q = M^{-1}b \\ A = M - N \end{array}}$$

$$x = Px + \underline{q} \rightsquigarrow \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \underline{q} \end{cases}$$

Teorema: se $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \in \mathbb{R}^n$

allora $x = Px + \underline{q}$

(questa è la soluzione del sistema lineare)

Dim: $x^{(k)} \longrightarrow x$ (ipotesi)

$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g$ (ipotesi)

$$x = \lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} P x^{(k)} + g$$
$$= Px + g$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax = b$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A = M - N$ M invertibile

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \cancel{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Successione generata $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

dipende dalla scelta del vettore iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

Ok convergenza.

$$\begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{bmatrix} = (-1)^{(k)} \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$X^{(k)}$ diverge (non converge)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P\, x^{(k)}.$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} \to 0 \quad \text{soluzione.}$$

Convergenza in generale dipende da come sono selezionati M e N

$$(A = M - N)$$

Lezione 27/04

$Ax = b \qquad A = M - N \qquad M$ invertibile.

$$(M-N)x = b \iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = \underbrace{M^{-1}N}_{P}\, x + \underbrace{M^{-1}b}_{q}$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}}$$

Fissata A la convergenza dipende in generale dalla selezione di M, N (matrici)

e vettore iniziale.

Analisi della convergenza

Convergenza

Def: Un metodo iterativo $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$ $(k \geq 0)$ per risolvere $Ax = b$ con $P = M^{-1}N$ $q = M^{-1}b$ $A = M - N$, si dice **CONVERGENTE** se

$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \lim x^{(k)} = x$ soluzione del sistema

cioè la successione generata converge alla soluzione del sistema lineare

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$$ metodo iterativo

$$x = Px + q$$ soluzione del sistema

$$x^{(k+1)} - x = P\left(x^{(k)} - x\right) \qquad k \geq 0$$

$e^{(k)} = x^{(k)} - x \qquad k \geq 0$

$$\boxed{e^{(k+1)} = P e^{(k)} \qquad \underline{k \geq 0}}$$

Teorema: Il metodo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ è convergente se $\exists \; \| \; \|$ norma matriciale indotta da una norma vettoriale tale che $\|P\| < 1$.

Dim: $e^{(k+1)} = P e^{(k)} \Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = \|P e^{(k)}\|$

$\leq \|P\| \, \|e^{(k)}\| \leq \|P\|^2 \|e^{(k-1)}\| \leq \dots$

$\leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\| \qquad \underline{0 \leq a < 1}$

$$\underset{\downarrow \, 0}{0} \leq \underset{\downarrow \, 0}{\|e^{(k+1)}\|} \leq \underset{\downarrow \, 0}{\|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|}$$

Teorema dei carabinieri. $\blacksquare$

Teorema: Se il metodo $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$ è convergente allora $\rho(P) < 1$

Dim: Se è convergente la successione converge $\forall x^{(0)}$ e quindi $e^{(k)} \to 0 \ \forall e^{(0)}$

Prendiamo $e^{(0)} = v$ t.c. $Pv = \lambda v$ con $|\lambda| = \rho(P)$ $\quad (e^{(0)} = x^{(0)} - x)$

$$e^{(k+1)} = Pe^{(k)} = \dots = P^{k+1} e^{(0)} = P^{k+1} v =$$

$$= \lambda^{k+1} v = \lambda^{k+1} e^{(0)}$$

$$(P^2 v = P \cdot P v = P \lambda v = \lambda P v = \lambda^2 v)$$

$$\Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = |\lambda|^{k+1} \underbrace{\|e^{(0)}\|}_{\neq 0}$$

$$\|e^{(k+1)}\| \to 0 \iff |\lambda| < 1$$

$\blacksquare$

Teorema: Se $\rho(P) < 1$ allora il metodo

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \quad \text{è convergente.}$$

dim: (solo x matrici diagonalizzabili)

$$P = V D V^{-1}$$

$$P^{k+1} = V D^{k+1} V^{-1}$$

$$\|P^{k+1}\|_\infty \le \|V\|_\infty \|V^{-1}\|_\infty \rho(P)^{k+1}$$

$$0 \Leftarrow 0 \le \|e^{(k+1)}\|_\infty \le \|P^{k+1}\|_\infty \|e^{(0)}\|_\infty$$

$$\le \|V\|_\infty \|V^{-1}\|_\infty \rho(P)^{k+1} \|e^{(0)}\|_\infty$$

$$\downarrow 0$$

$\boxed{\mathcal{E}}$

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente per la

Convergenza è che $\rho(P) < 1$.

$$X^{(k+1)} = P X^{(k)} + q \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Convergente?

$$\frac{11}{12} = \|P\|_1 = \max\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right\}$$

$$\|P\|_\infty = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} > 1$$

$$\|P\|_\infty > 1 \quad e \quad \|P\|_1 < 1$$

Il metodo è convergente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = M - N$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & & -0 \\ & 0 & \vdots \\ & & -0 \end{bmatrix}$$

è convergente? A soluzioni le proprietà di P

$$P = M^{-1} N = M^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0 \,|\, v \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0 \,|\, M^{-1} v \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} v = x \iff M x = v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ \vdots \\ -0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = -\theta$$

$$\theta x_1 + \theta x_2 + \dots + \theta x_{n-1} + x_n = 0$$

$$x_n = \theta^2 + \theta^2 + \dots + \theta^2 = (n-1)\theta^2$$

$$P = \begin{bmatrix} & & & -\theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & -\theta \\ & & & (n-1)\theta^2 \end{bmatrix}$$

$\varphi(P) = ?$ P è triangolare superiore e quindi i suoi autovalori stanno sulla diagonale principale

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = (n-1)\theta^2$$

$$\varphi(P) = (n-1)\theta^2$$

è convergente $\iff (n-1)\theta^2 < 1$

$$\iff \theta^2 < \frac{1}{n-1}$$

$c)$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \theta < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

$$\|P\|_\infty = \max\left\{ |\theta| , (n-1)\theta^2 \right\} < 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \theta \\ & \ddots & \vdots \\ & & \theta \\ \theta & \cdots\ \theta & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} & 0 & -\theta \\ & & \vdots \\ & & -\theta \\ -\theta & \cdots\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = P = N = \begin{bmatrix} 0 & & -\theta \\ & & \vdots \\ & & -\theta \\ -\theta & \cdots\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Condizioni suff su θ affinché il metodo sia convergente

$$\|P\|_\infty = \|P\|_1 < 1$$

$(n-1)|\theta| < 1$

$|\theta| < \dfrac{1}{n-1}$ $\qquad -\dfrac{1}{n-1} < \theta < \dfrac{1}{n-1}$

Condizioni necessarie e sufficienti $\varphi(P)$?

$$\det\left(\begin{bmatrix} \delta & & \theta \\ & \ddots & \vdots \\ & & \theta \\ \theta & \cdots \ \theta & \delta \end{bmatrix}\right) = \,?$$

$\forall\, \delta \neq 0$ la matrice ammette fattorizzazione LU

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \delta & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \delta & \theta \\ \hline \theta & \cdots & \theta & \delta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline \frac{\theta}{\delta} & \cdots & \frac{\theta}{\delta} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} \delta & & & \theta \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \delta & \theta \\ \hline & 0 & & x \end{array}\right].$$

$$x + (n-1)\frac{\theta^2}{\delta} = \delta \qquad x = \delta - (n-1)\frac{\theta^2}{\delta}.$$

$\det(\delta I - P) = \det U \cdot \det L \sim 1$

$$= \underbrace{\lambda^{n-1}} \cdot \underbrace{\left[\lambda - \frac{(n-1)\theta^2}{\lambda} \right]} \times$$

$$= \lambda^{n} - (n-1)\theta^2 \lambda^{n-2}$$

$$= \lambda^{n-2} \cdot \left(\lambda^2 - (n-1)\theta^2 \right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{n-1}\cdot\theta \end{cases}$$

$$\rho(P) = \sqrt{n-1}\,|\theta| < 1$$

$$\Leftrightarrow |\theta| < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \theta < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

<u>Metodi di</u> Jacobi e

Gauss-Seidel.

$A = M - N \qquad Ax = b$

M invertible.

Jacobi $\qquad A = L + U + D$

$L = \text{tril}(A, -1)$

$U = \text{triu}(A, 1)$

$D = \text{diag}(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$A = L + U + D$

Jacobi $M = D \qquad N = -L - U$

1) Applicabilità M invertibile $\iff a_{ii} \neq 0$
$i = 1 \dots n$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(k+1)} \end{bmatrix} = N x^{(k)} + b$$

$$a_{jj} x_j^{(k+1)} = b_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$j = 1 \dots n$

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{jl} \underline{\underline{x_l^{(k)}}} \right)$$

$j = 1 \dots n$

$k \geq 0$

<u>iterazione di Jacobi</u>

① implementazione richiede 2 vettori ..

$x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$

② costo computazionale

$\underline{\underline{nnz(A)}}$

<u>Gauss-Seidel</u>

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{jl} x_l^{(k)} \right)$$

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} x_l^{(k)}} - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}\right)$$

$j = 1 \dots n$

questo calcolo $x_j^{(k+1)}$ ho già calcolato

$x_1^{(k+1)} \dots x_{j-1}^{(k+1)}$

Gauss - Seidel

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} x_l^{(k+1)}} - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}\right)$$

$j = 1 : n$

$$a_{jj} x_j^{(k+1)} = b_j - \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} x_l^{(k+1)} - \sum_{l=j+1}^{n} \dots$$

$$\sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} x_l^{(k+1)} + a_{jj} x_j^{(k+1)} = b_j - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$$\sum_{l=1}^{j} a_{jl} x_l^{(k+1)} = b_j - \sum_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(k)}$$

$j = 1 \dots n$

$$(L+D)\, x^{(k+1)} = b - U x^{(k)}$$

$M = L + D \qquad N = -U$

Applicabile: $\iff a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

Implementazione: richiede 1 solo vettore

Costo computazionale: $\underline{\underline{O(nnz(A))}}$

Teorema: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ predominante diagonale.
Allora A è invertibile, Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili, Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.

Dim: A p.d. $\Rightarrow$ A invertibile ok

A p.d. $\Leftrightarrow$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ $i=1..n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0 \qquad i=1:n$$

$\Rightarrow$ $a_{ii} \neq 0$ $i=1 \ldots n$

Convergenza dipende da P
dipende dagli autovalori di P

$$\det(\lambda I - P) = \det(\lambda I - M^{-1}N)$$

$$= \det(\lambda M^{-1} M - M^{-1} N) =$$

$$\det\left(M^{-1} \cdot (\lambda M - N) \right) =$$

$$\underbrace{\det M^{-1}}_{\neq 0} \cdot \det(\lambda M - N)$$

$$\boxed{\det(\lambda I - P) = 0 \iff \det(\lambda M - N) = 0}$$

λ autovalori di P $\iff$ $\lambda M - N$ matrice singolare

Per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda M - N$ è una matrice singolare?

Se $|\lambda| \geq 1$ facciamo vedere che $\lambda M - N$ è strettamente diagonale $\Rightarrow$ [illegible]

$M = L + D \qquad N = -U$

$$\alpha M - N = \alpha(L+D) + U$$

$$|\alpha a_{ii}| \ge \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$i = 1 \ldots m$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$|\alpha||a_{ii}| > |\alpha| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\alpha| \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$|\alpha a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha a_{ij}| + |\alpha| \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\ge \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{m} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dire per quali valori di α A è p.d.?
2. Dire per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente.
3. Dire per quali valori di α il metodo di G-S è convergente.

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{bmatrix}$$

1. Dimostra che il metodo di Jacobi è convergente
2. Determinare le Tale ak

$$\frac{\|e^{(k)}\|_\infty}{\|e^{(0)}\|_\infty} \leq 2^{-32}.$$

$\forall\, e^{(0)} \neq 0.$