Lezione 04/05

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI NON LINEARI

$$\boxed{f(x) = 0}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Es: $f(x) = e^x - \log x$ $\quad f(x) = 6x - x^4$

$f(x) = 3x^5 - 7x^2 + x$

- Condizionamento
- Metodi numerici
- Stabilità

CONDIZIONAMENTO

SENSIBILITÀ DELLA SOLUZIONE RISPETTO ALLE PERTURBAZIONI DEI DATI IN INGRESSO.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a - g(x)$

$f \in C^2(\mathbb{R})$ $\quad (g \in C^2(\mathbb{R}))$

$f(x) = 0 \iff a - g(x) = 0$ ho soluzione $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha) = a - g(\alpha) = 0$

$\tilde{a} = a(1+\varepsilon) = a + a\varepsilon$

$\tilde{a} - g(x) = 0$ ho soluzione $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$

$\tilde{a} - g(\tilde{\alpha}) = 0$

distanza fra α e $\tilde{\alpha}$?

$0 = \tilde{a} - g(\tilde{\alpha}) \doteq \tilde{a} - g(\alpha) - g'(\alpha)\cdot(\tilde{\alpha} - \alpha)$

$0 \doteq \tilde{a} - g(\alpha) - g'(\alpha)\cdot(\tilde{\alpha} - \alpha)$

$$0 \doteq a + a\varepsilon - g(\alpha) - g'(\alpha)\cdot(\tilde{\alpha} - \alpha)$$

$$0 \doteq a\varepsilon - g'(\alpha)\cdot(\tilde{\alpha} - \alpha)$$

$$g'(\alpha)\cdot(\tilde{\alpha} - \alpha) = a\varepsilon$$

Se $g'(\alpha) \neq 0$ $\qquad \tilde{\alpha} - \alpha \doteq \dfrac{a\cdot\varepsilon}{g'(\alpha)}$

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| = \frac{|a\cdot\varepsilon|}{|g'(\alpha)|}$$

Il fattore che amplifica la perturbazione <u>assoluta</u> del dato è $\dfrac{1}{|g'(\alpha)|}$ = numero di condizionamento della radice α

Se $|g'(\alpha)|$ è piccolo, il problema è mal condizionato

Se $|g'(\alpha)|$ è grande il problema è ben condizionato

$\&\ |g'(\alpha)| = 0 \quad k \simeq +\infty$

$g'(\alpha) = f'(\alpha)$

$f'(\alpha) = 0$ α è una radice multipla

$f'(\alpha) \neq 0$ α è una radice semplice.

$f(x) = 0$ volte più complesso di $Ax = b$

① Ci sono e quante sono le soluzioni :

ANALISI GRAFICA

$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

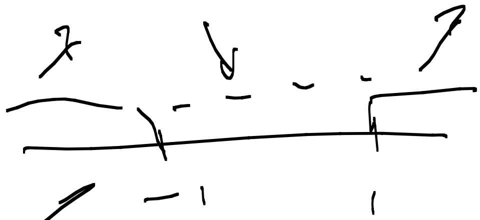
$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

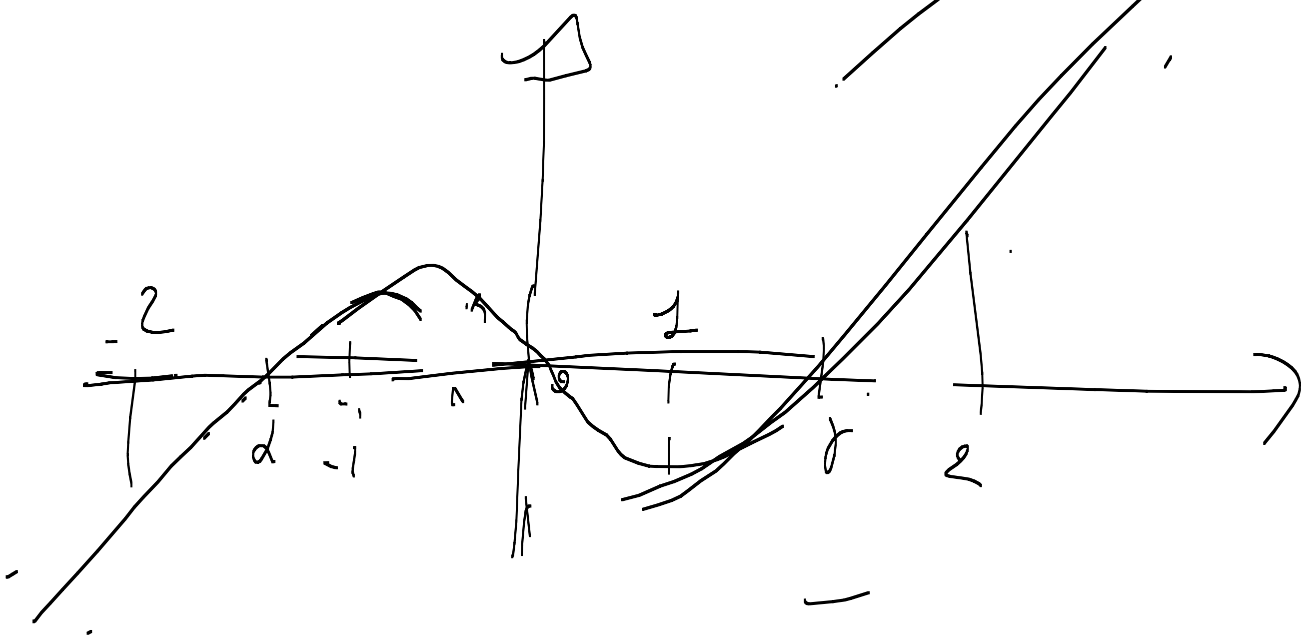
$$\lim_{x\to+\infty} x^3-3x+1 = \lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3-3x+1 = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(+1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2-3 = 3\cdot(x^2-1)$$

$$f'(x)=0 \iff x=\pm 1$$





$$f(-1) = (-1)^3-3\cdot(-1)+1 = -1+3+1 = 3$$

$$f(1) = 1-3+1 = -1$$

L'equazione ha 3 soluzioni reali

Localizzare le radici significa trovare intervalli di separazione, cioè intervalli del tipo $[a,b]$ t.c.

α è l'unica soluzione di $f(x)=0$ in $[a,b]$

$\alpha \in [-2,-1]$ $\qquad \beta \in [-1,1]$ $\qquad \gamma \in [1,2]$

$f(x) = e^x - 3x$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - 3x = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - 3\frac{x}{e^x}\right) = +\infty$$

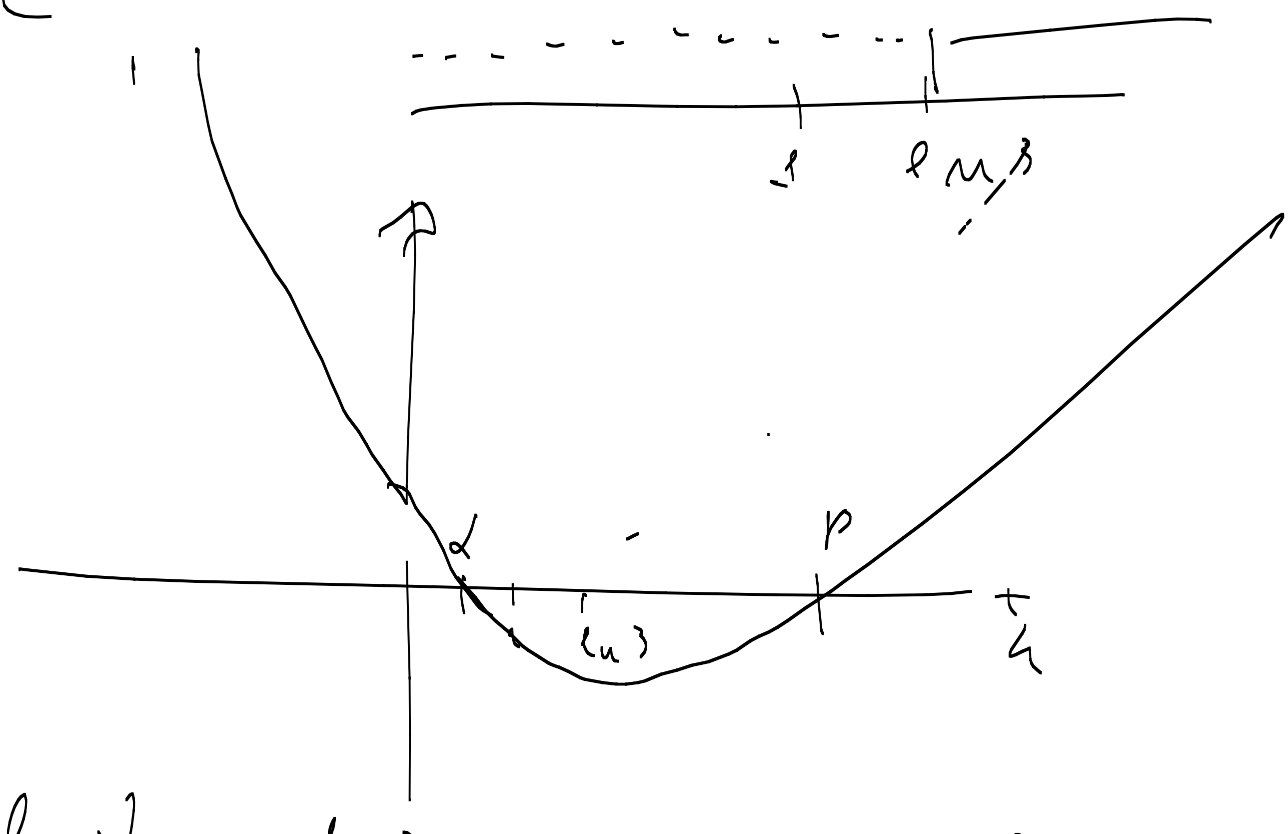
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x - 3x = +\infty$$

$f'(x) = e^x - 3$ $\qquad f'(x) = 0 \iff e^x = 3$

$\iff x = \ln 3 \qquad f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 3$

$\iff x \geq \ln 3$



$f(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3 \cdot \ln 3 = 3(1 - \ln 3) < 0$

$f(x) = 0$ ammette 2 soluzioni reali

$\alpha \in [0, \ln 3] \qquad \beta \in [\ln 3, 4]$

α e β son due semplici $f'(\alpha) \neq 0$ $f'(\beta) \neq 0$

$f(x) = x - \cos x$

$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

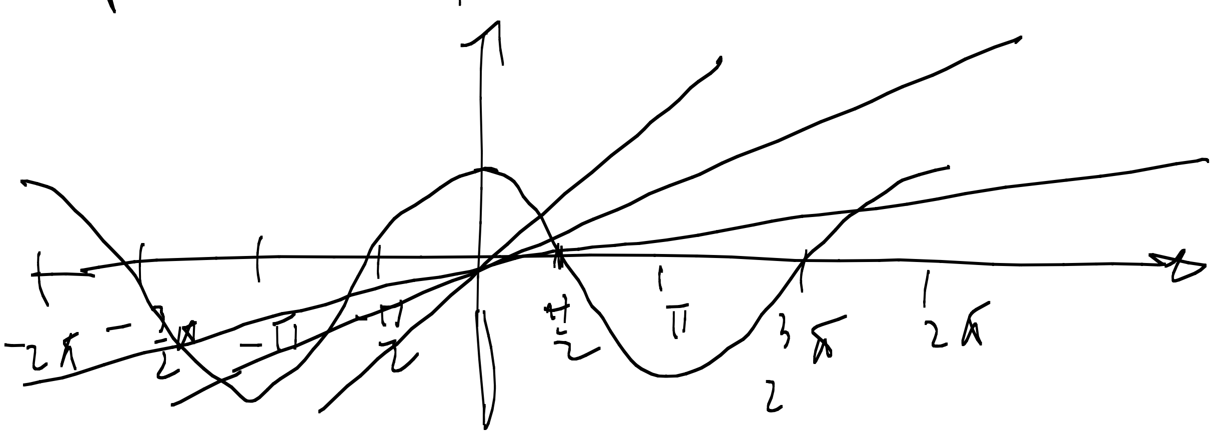
$f(x) = 0$ $\quad f(x) = h(x) - g(x)$

$f(x) = 0 \iff h(x) - g(x) = 0 \iff h(x) = g(x)$

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

per quali valori di x i grafici di $h(x)$ e $g(x)$ si intersecano.

$f(x) = 0$ $\quad f(x) = x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$



$\exists$ soluzioni reali tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ $\quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$h(x) = x \qquad h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 1$

$h(x) \geq 1 \quad \forall x \geq \frac{\pi}{2}$ e quindi non ci sono intersezioni oltre 1

$h(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < -1 \qquad h(x) \leq -1 \quad \forall x \leq -\frac{\pi}{2}$

e quindi non ci sono intersezioni prima di $-\frac{\pi}{2}$

$f(x) = x - \cos x$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \cos x = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = +\infty$$

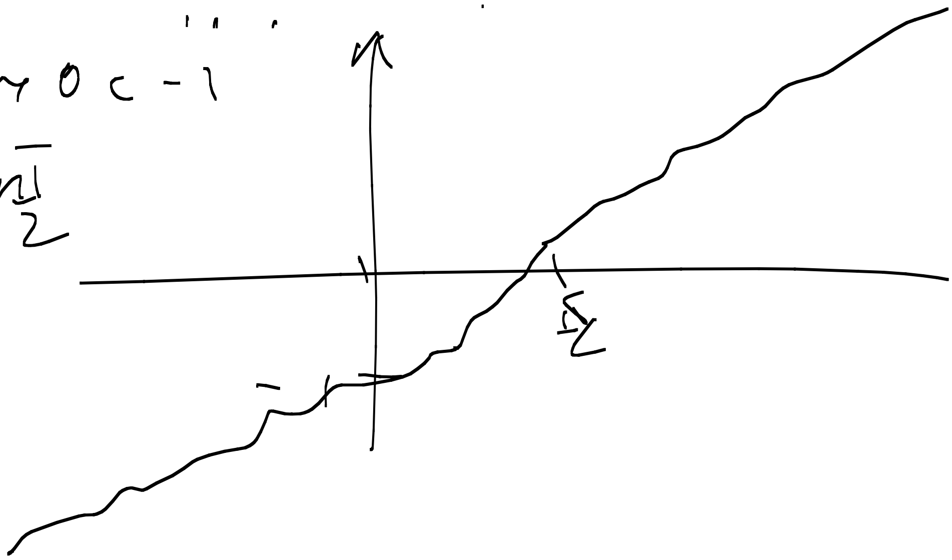
$$\lim_{x \to -\infty} x - \cos x = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = -\infty$$

$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \forall x$

f monotona $\Rightarrow \exists!\ \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$

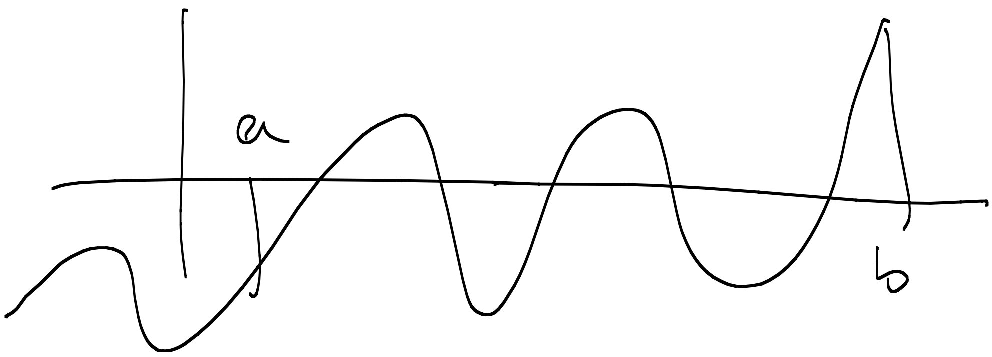


Metodo di Bisezione

Teorema di esistenza degli zeri: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f \in C^0([a,b])$. Se $f(a)f(b) < 0$ allora

$\exists\, \alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$



Ipotesi: $f \in C^0([a,b])$ $\quad f(a)f(b) < 0$

$a_0 = a, \quad b_0 = b$

for $k = 1 : nf$

$c_k = \dfrac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ (punto di mezzo dell'intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$)

if $(f(c_k) f(a_{k-1}) \leq 0)$

$a_k = a_{k-1}$;

$b_k = c_k$;

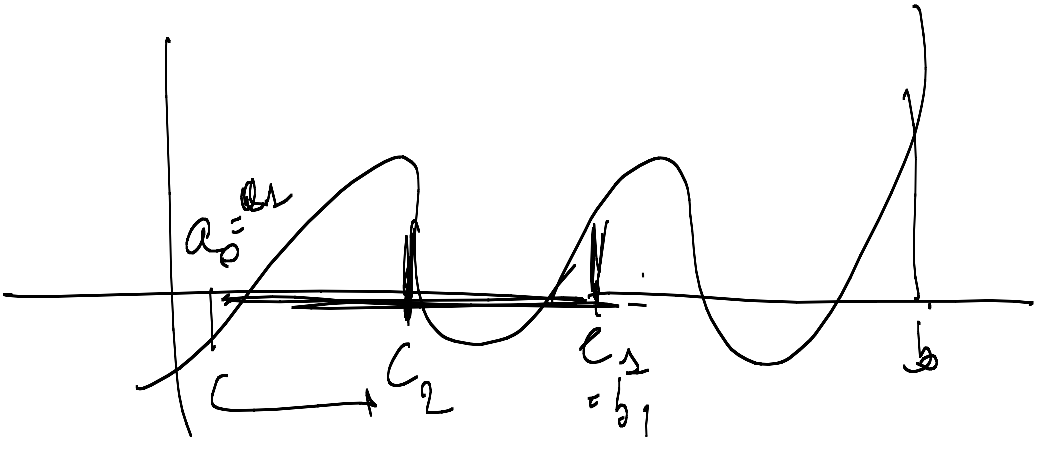
else

$a_k = c_k$

$b_k = b_{k-1}$

endif

end



$\{a_k\}_{k\geq 0}$ $\{b_k\}_{k\geq 1}$ $\{c_k\}_{k\geq 1}$

1. $a_k \geq a_{k-1} \quad \forall k \geq 1$
2. $b_k \leq b_{k-1} \quad \forall k \geq 1$
3. $a_k \leq b_k \quad \forall k$
4. $b_k - a_k = \dfrac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$
5. $f(a_k) f(b_k) \leq 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow$ 1. $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = l_a \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = l_b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to+\infty} b_k - a_k = l_a - l_b$$

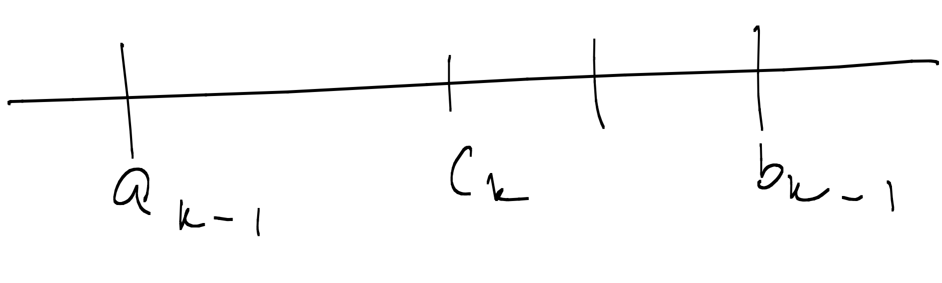
$$\lim_{k\to+\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

$$l_a = l_b = l$$

$$\lim_{k\to+\infty} f(a_k)\,f(b_k) = \left(f(l)\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(l) = 0$$

$$a_k \to l \qquad b_k \to l \qquad c_k \to l$$



$$b_{k-1} - a_{k-1} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2} \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k-1}}$$

$$|a_{k-1} - \ell| \leq |a_{k-1} - b_{k-1}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k-1}}$$

$$|b_{k-1} - \ell| \leq |b_{k-1} - a_{k-1}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k-1}}$$

$$|c_k - \ell| \leq \frac{|b_{k-1} - a_{k-1}|}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$|c - \ell| \leq 2^{-s}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} \leq 2^{-s} \qquad c = c_k$$

$$2^k \geq 2^s \cdot (b_0 - a_0)$$

$k \geq \log 2^{S} \cdot (b_0 - a_0)$

$= \log 2^{S} + \log(b_0 - a_0)$

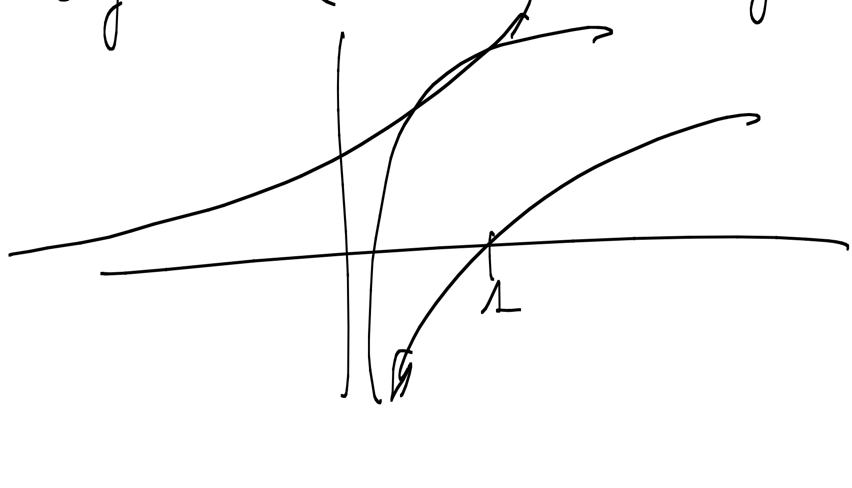
$= S + \log(b_0 - a_0)$

$k = \lceil S + \log_2(b_0 - a_0) \rceil$

$e^{x} - \log x = 0$

$C^{\infty}(\mathbb{R}^{+}) \quad \mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

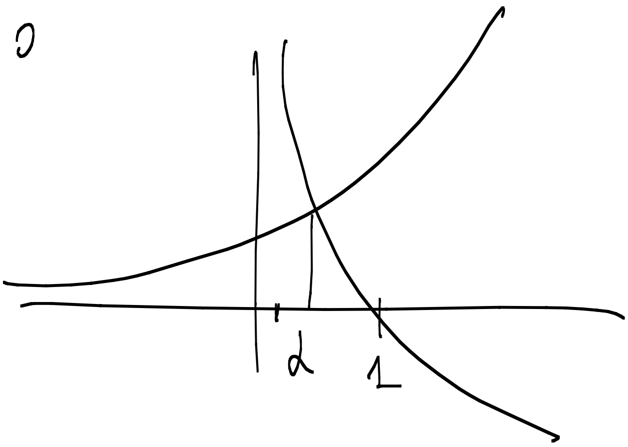
$e^{x} - \log x = 0 \iff e^{x} = \log x$



$e^x - \log x = 0$ Studio grafico basato sui grafici di f.

$e^x + \log x = 0$

$e^x = -\log x$



$\exists!\ \alpha \quad \alpha \in [0, 1] \quad f$ non definita in 0

$a_0 = \frac{1}{e^3} \qquad -\log \frac{1}{e^3} = \log e^3 = 3$

$e^{\frac{1}{e^3}} \le e < 3$

$a = \frac{1}{e^3} \qquad b = 1$

$$|c_k - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$k \geq \left\lceil s + \log_2 (b_0 - a_0) \right\rceil$$

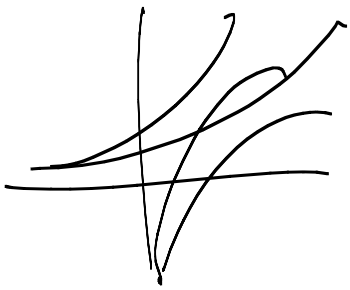
$$\geq \lceil s \rceil$$

$$f(x) = e^x - kx$$

1. Determinare al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione
2. Per $k = 3$ determinare un'approssimazione delle soluzioni utilizzando il metodo di bisezione.

Codice pseudocodice ?

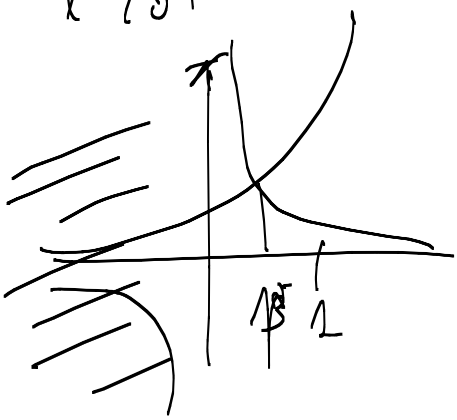
$$f(x) = e^x - \log x = 0$$

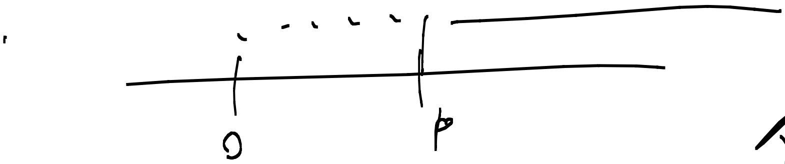


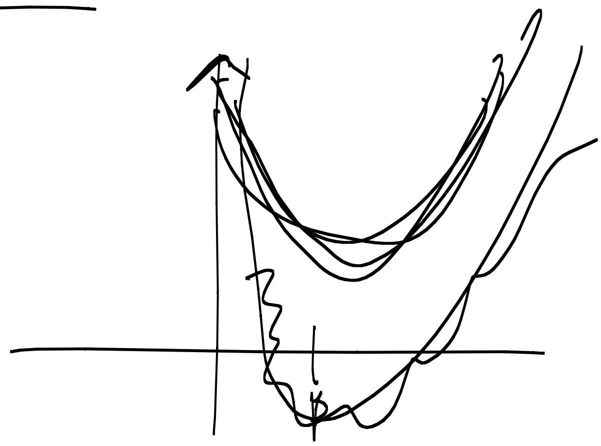
$$C^\infty(\mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} = +\infty$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = 0$$







$$f(\beta) = e^\beta - \log\beta = \frac{1}{\beta} - \log\beta > 0$$

NON CI SONO SOLUZIONI