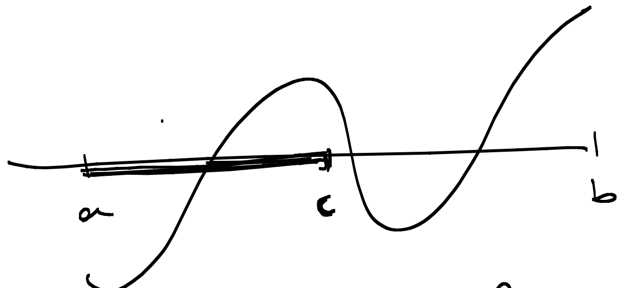
Lezione 11/05

$f(x) = 0 \qquad f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- METODO DI BISEZIONE



$f(a)f(b) < 0$

$f \in C^0([a,b])$

- PRO:
  - basso regolarità di f
  - semplicità dei criteri di convergenza.
  - basso costo computazionale (1 valutazione di f ogni passo)

- CONS
  - convergenza lenta

Def: Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_k \neq \alpha$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Diciamo che $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente se

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = l \quad \text{con } 0 < l < 1.$$

Diciamo che $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge invece quadraticamente se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = c \in \mathbb{R}.$$

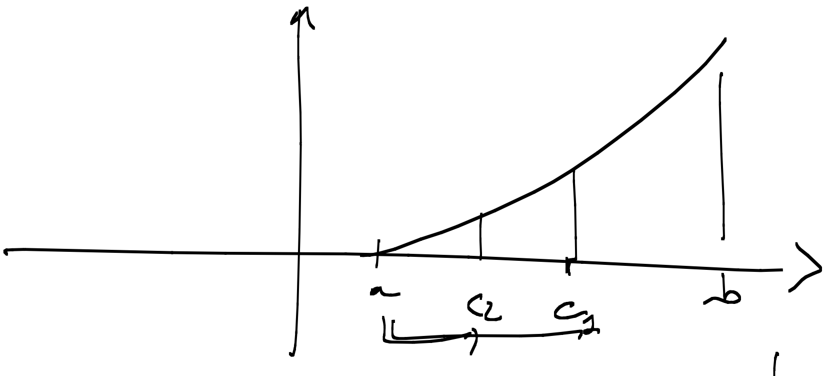
$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} \simeq l \Rightarrow |x_{k+1}-\alpha| \simeq l \cdot |x_k-\alpha|$$

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} \simeq c \Rightarrow |x_{k+1}-\alpha| \simeq c\,|x_k-\alpha|^2$$

$l = \frac{1}{2}$ $\quad c = 1$ $\quad |x_1 - \alpha| = \frac{1}{2}$

- convergenza lineare $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ .... $\frac{1}{2^k}$
- convergenza quadratica $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{2^8}$ .... $\frac{1}{2^{2^k}}$

Bisezione



$|c_{k+1}-\alpha| = \frac{1}{2}|c_k-\alpha|$ $\qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{|c_{k+1}-\alpha|}{|c_k-\alpha|} = \frac{1}{2}$

Bisezione $\longrightarrow$ esempio di una convergenza lineare.

METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE

$$\boxed{Ax - b = 0} \iff \boxed{x = Px + g} \implies \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = 0} \iff \boxed{x = g(x)} \implies \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \iff x = x - f(x) \qquad g(x) = x - f(x)$$

$$f(x) = 0 \iff x = x - \frac{f(x)}{h(x)} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$

Teorema (punto fisso): Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a,b])$, $\alpha \in (a,b)$, $g(\alpha) = \alpha$. Se $\exists\, \rho > 0$ t.c.

$$|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I_\alpha = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset [a,b]$$

Allora il metodo $\begin{cases} x_0 \in I_\alpha \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$ genera successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c.

(1) $x_k \in I_\alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha$

Dim: $g \in C^1([a,b]) \Rightarrow g' \in C^0([a,b]) \to |g'(x)| \in C^0([a,b])$

I_α intervallo chiuso e limitato $\to$ compatto in $\mathbb{R}$.

Wierstrass funzioni continue sui compatti ammette max e min.

$$\exists \max_{x \in I_\alpha} |g'(\cancel{x})| = \delta < 1$$

Dimostriamo per induzione su k $\quad |x_k - \alpha| \le \delta^k \rho \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(1) $|x_k - \alpha| \le \delta^k \rho < \rho \Rightarrow x_k \in I_\alpha$

(2) $0 \le \underbrace{|x_k - \alpha|}_{\to 0} \le \delta^k \rho \to 0$ (confronto)

$k=0$ (passo base) $\quad |x_0 - \alpha| \le \delta^0 \rho = \rho$ vero per ipotesi $x_0 \in I_\alpha$

$k \rightsquigarrow k+1 \quad |x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)|$

Lagrange $\left| g'(\xi_k)\cdot(x_k-\alpha)\right|$

$$|\xi_k-\alpha| \le |x_k-\alpha| \le \lambda^k\rho < \rho \Rightarrow \xi_k\in I_\alpha$$

$$|x_{k+1}-\alpha| = |g'(\xi_k)|\,\underbrace{|x_k-\alpha|} \le \lambda\cdot\lambda^k\rho = \lambda^{k+1}\rho$$

$\blacksquare$

Corollario: Sia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad g(\alpha)=\alpha \quad \alpha\in(a,b)$

$g\in C^1([a,b])$.

Se $|g'(\alpha)|<1$ allora $\exists\,\rho>0$ t.c.

posto $I_\alpha=[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$ il metodo $\begin{cases} x_0\in I_\alpha \\ x_{k+1}=g(x_k)\end{cases}$

genera successione che soddisfa (1) e (2).

Dim: $h(x) = |g'(x)| - 1 \in C^0([a,b])$

$$h(\alpha) = |g'(\alpha)| - 1 < 0$$

Per il teorema della permanenza del segno $\exists\,\rho>0$ t.c.

$$h(x)<0 \quad \forall\, x\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho].$$

$$h(x) < 0 \iff |g'(x)| - 1 < 0 \iff |g'(x)| < 1$$

Convergenza locale: localmente convergente in α se:

$\exists$ intorno aperto di α (I_α) t.c.

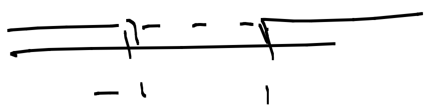
$\forall x_0 \in I_\alpha$ la successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$

soddisfa ① e ②

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$$

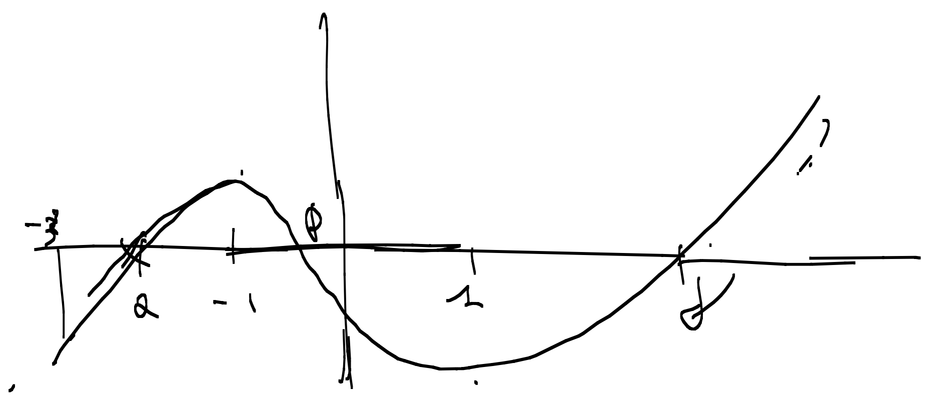
$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\cdot(x^2 - 1)$$



$$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = (1)^3 - 3\cdot(1) - 1 = -2 < 0$$



3 soluzioni reali $\qquad f(x) = x^3 - 3x - 1$

$\alpha \in [-3, -1] \qquad \beta \in [-1, 0] \qquad \gamma \in [1, 2]$

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \iff x^3 - 1 = 3x$$

$$\iff \frac{x^3 - 1}{3} = x \qquad g(x) = \frac{x^3 - 1}{3}$$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

- localmente convergente in α, β, γ?
- posso definire intervalli di convergenza definiti per l'approssimazione di α, β, γ?

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{3} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$g'(x) = \frac{3x^2}{3} \qquad |g'(x)| = x^2$$

$$|g'(x)| < 1 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

$|g'(\alpha)| > 1 \qquad |g'(\beta)| < 1$

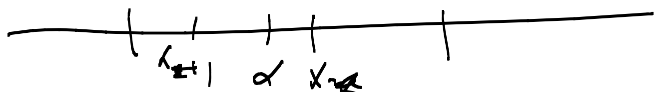
$|g'(\gamma)| > 1$

Il metodo è localmente convergente in β

(β è punto fisso attrattivo)

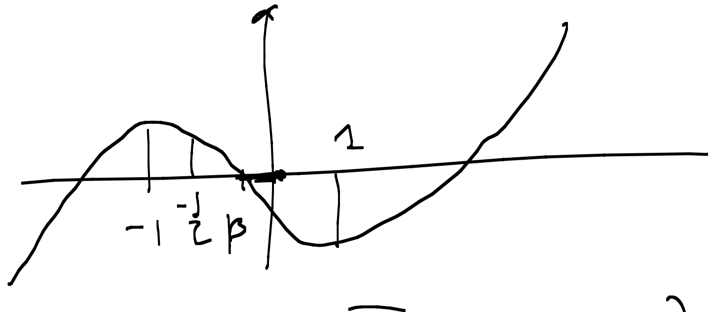
Se $|g'(\alpha)| > 1$ α è detto punto fisso repulsivo

α e γ sono punti fissi repulsivi



$$|x_{k+1}-\alpha| = |g(x_k)-g(\alpha)| = \underbrace{|g'(\xi_k)|}_{>1}|x_k-\alpha|$$

in α e γ non c'è convergenza locale



punto fisso se $I_\beta = [\beta-\rho, \beta+\rho] \subseteq (-1, 1)$

allora il metodo $\begin{cases} x_0 \in I_\beta \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$

$0 \in I_\beta$ per un certo ρ ?

il più piccolo intervallo centrato che contiene 0 è

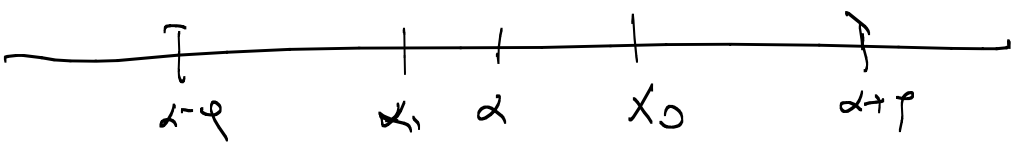
$$[\beta+\beta,\ \beta-\beta] \qquad \beta=-\rho$$

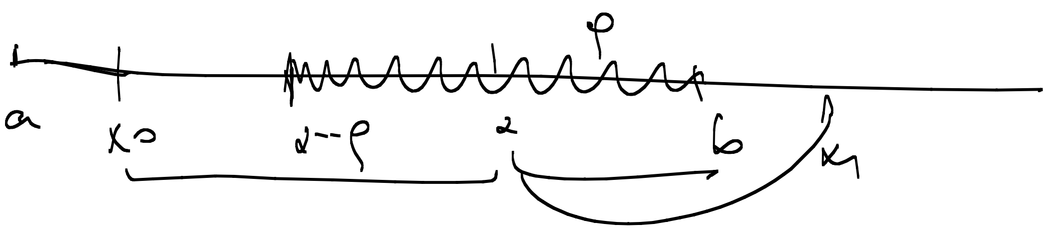
$$\underline{2\beta > -1} \iff \beta > -\frac{1}{2} \quad \text{OK}$$

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} - 1$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} > 0$$

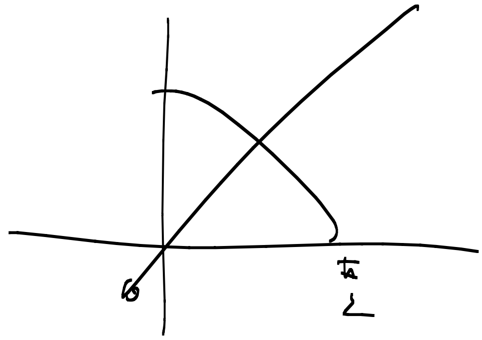
e la successione generata da $x_0 = 0 \longrightarrow \underline{\beta}$





$f(x) = x - \cos x = 0$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



$x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$

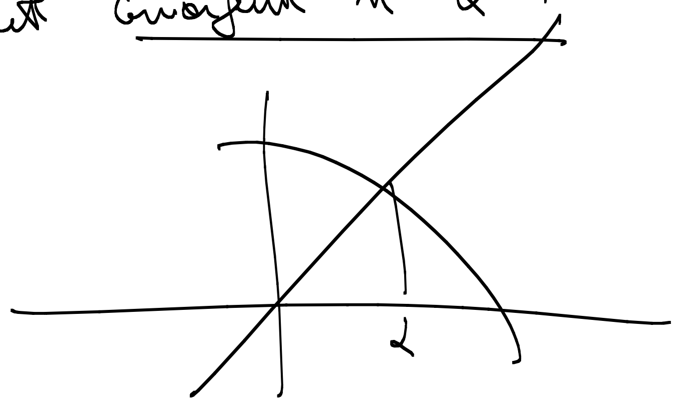
$x_{k+1} = g(x_k) \qquad g(x) = \cos x$

(1) il metodo è localmente convergente in α ?

$$|g'(x)| = |\operatorname{sen} x|$$

$$|g'(\alpha)| = |\operatorname{sen} \alpha| < 1$$

localmente convergente in α.

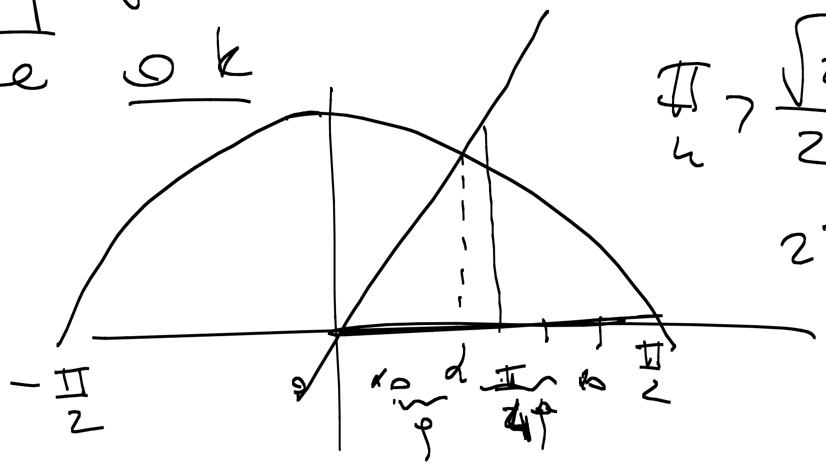


Mostro che il metodo genera successioni convergenti ad α per ogni $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Punto fisso $\quad |\sin x| < 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Quindi per gli intervalli centrati in α contenuti in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

è ok



$\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff$

$2\pi > 4\sqrt{2}$

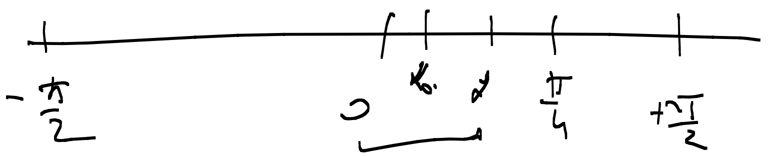
$\iff \pi > 2\sqrt{2}$

$\iff \pi^2 > 8$

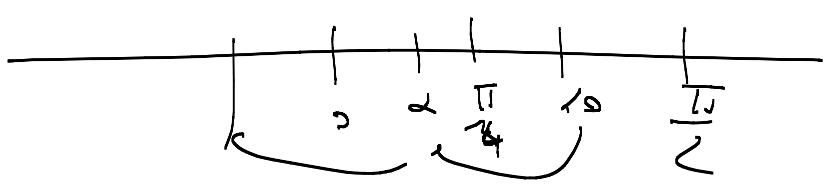
ok

$x_0 = \frac{\pi}{2} \qquad x_1 = 0, x_2 = 0$

$\longrightarrow$ come la convergenza.



ok



$X_0 = \frac{\pi}{2}$ $\cancel{X_1} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$X^3 - 3x - 1 = 0$

$\iff X^3 = 3X + 1 \iff X = \sqrt[3]{3X+1}$

$X_{k+1} = g(x_k)$ $g(x) = \sqrt[3]{3x+1}$

Convergenza locale.