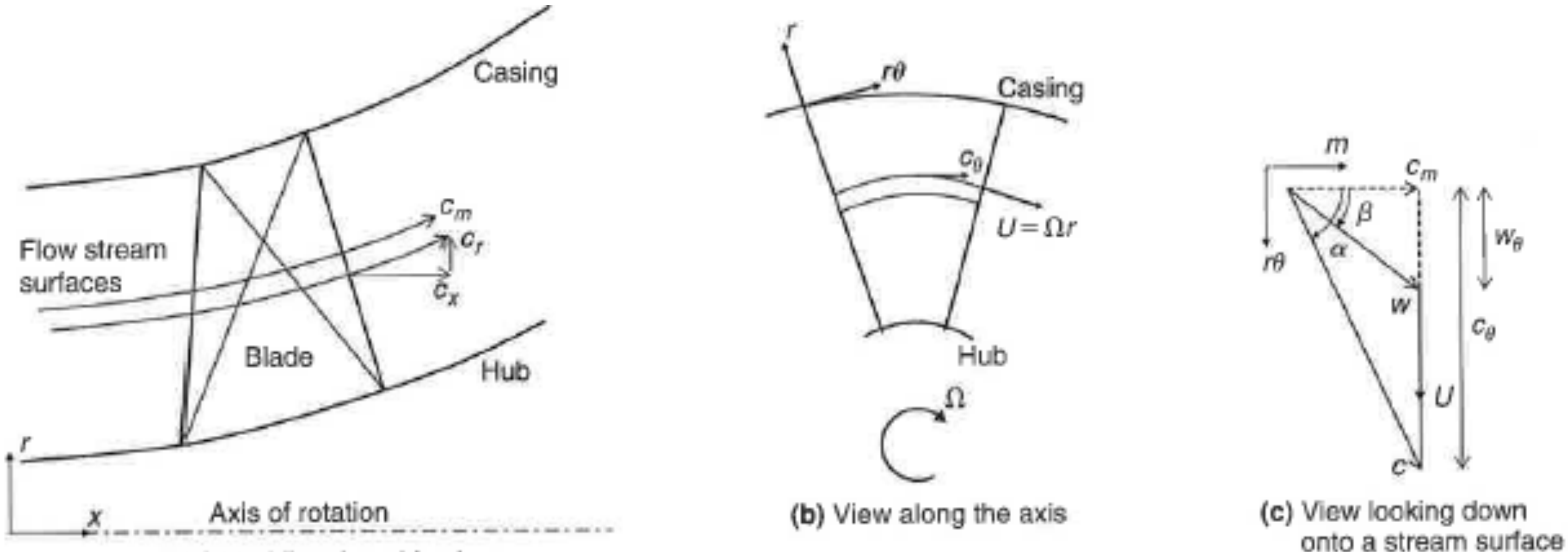
Equazioni fondamentali

Definizioni



(a) Meridional or side view

(b) View along the axis

(c) View looking down onto a stream surface

$$c_m = \sqrt{c_x^2 + c_r^2} \qquad c_m = \sqrt{c_x^2 + c_r^2 + c_\theta^2} = \sqrt{c_m^2 + c_\theta^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(c_\theta / c_m\right) \qquad w_\theta = c_\theta - U$$

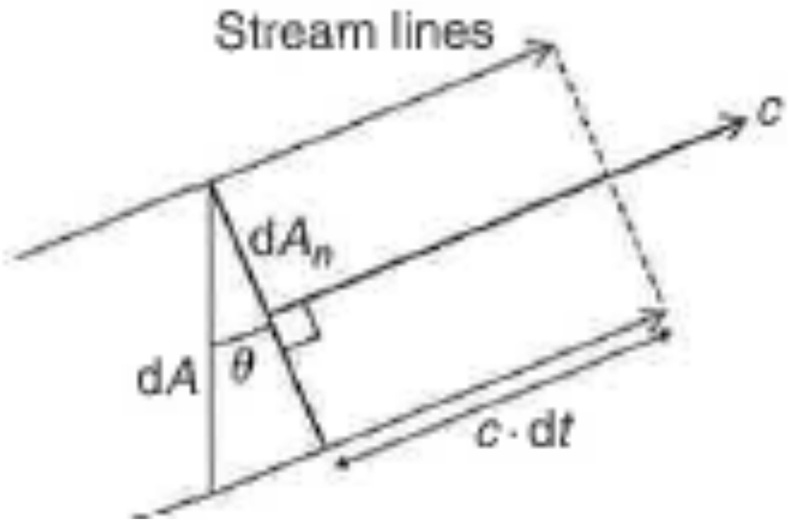
$$\tan\beta = \tan\alpha - \left(U / c_m\right) \quad \beta = \tan^{-1}\left(w_\theta / c_m\right)$$

Leggi fondamentali

- Equazione di continuità
- Primo principio della termodinamica per sistemi aperti in regime stazionario
- Equazione della quantità di moto
- Secondo principio della termodinamica

Equazione di continuità

- Consideriamo un tubo di flusso:



$$d\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho c dA_n$$

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_{n1} = \rho_2 c_2 A_{n2}$$

Primo principio della termodinamica

- Se applichiamo il primo principio a un sistema stazionario aperto possiamo scrivere:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left[\left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right)\right]$$

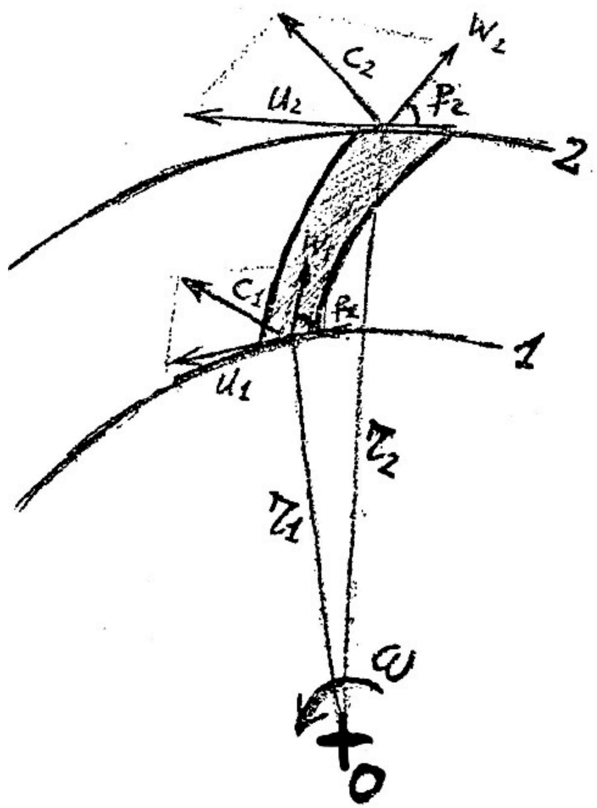
- Possiamo poi definire l'entalpia totale:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}c^2$$

- E se consideriamo l'ingresso e l'uscita di una macchina (gz varia pochissimo):

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left(h_{02} - h_{01}\right)$$

Quantità di moto

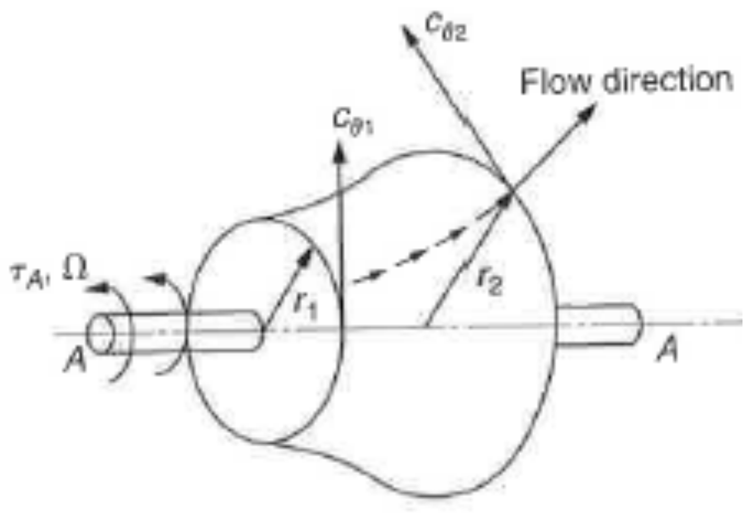


- Applicando la seconda legge di Newton sul moto possiamo scrivere:

$$\sum F_x = \frac{d}{dt}(mc_x)$$

- Dato un sistema che ruota intorno ad un asse generico A-A, possiamo calcolare il momento della quantità di moto:

$$d\tau_A = d(mrc_\vartheta)$$



Quantità di moto

- La coppia scambiata tra fluido e macchina è data da:

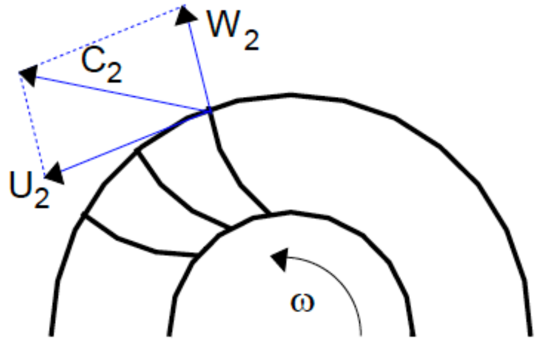
$$M = \frac{d\tau_A}{dt} = \dot{m}\Delta(rc_\vartheta)$$

- Per ottenere la potenza scambiata con il fluido, basta moltiplicare per la velocità angolare Ω:
$$\dot{W} = M\Omega = \dot{m}\Omega(r_2 c_{\vartheta 2} - r_1 c_{\vartheta 1}) = \dot{m}(U_2 c_{\vartheta 2} - U_1 c_{\vartheta 1})$$
- Il lavoro specifico di compressione ed espansione è:

$$W_c = \frac{\dot{W}_c}{\dot{m}} = \frac{M\Omega}{\dot{m}} = U_2 c_{\vartheta 2} - U_1 c_{\vartheta 1} > 0$$

$$W_t = \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} = \frac{M\Omega}{\dot{m}} = U_1 c_{\vartheta 1} - U_2 c_{\vartheta 2} > 0$$

Equazione di Eulero



- Se scriviamo i triangoli di velocità in forma vettoriale:

$$\vec{c} = \vec{U} + \vec{w}$$

- Considerando le proiezioni lungo *U* e lungo l'asse:

$$c_\theta = U + w_\theta$$
$$c_z = w_z$$

- Possiamo scrivere dal teorema di Carnot

$$c^2 + U^2 - 2Uc_\theta = w^2 \rightarrow Uc_\theta = \frac{c^2 + U^2 - w^2}{2}$$

Equazione di Eulero

- Sostituendo nell'equazione del momento della quantità di moto:

$$W_t = \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} = \frac{M\Omega}{\dot{m}} = U_1 c_{\vartheta 1} - U_2 c_{\vartheta 2} > 0$$

- Otteniamo:

$$W_t = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

$$W_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$$

Equazione dell'energia

- Se riscriviamo l'equazione dell'energia in forma termodinamica:

$$Q - W = \Delta h + \Delta E_p + \Delta E_c$$

$$Q - W = \Delta h + g\Delta z + \frac{\Delta c^2}{2}$$

- Trascurando le variazioni di energia potenziale e considerando trasformazioni adiabatiche:

$$W = h_1 - h_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Equazione dell'energia

- Possiamo quindi definire una grandezza che chiamiamo entalpia totale:

$$h_0 = h + \frac{c_2}{2}$$

- Da cui possiamo scrivere che:

$$W = h_1 - h_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = h_{01} - h_{02}$$

- Il lavoro adiabatico è quindi uguale alla variazione di entalpia totale

Rotalpia

- Possiamo definire una nuova grandezza che chiamiamo rotalpia:

$$I = h_0 - Uc_\vartheta = h + \frac{1}{2}c^2 - Uc_\vartheta$$

- Dato che:

$$c_\vartheta = w_\vartheta + U; \qquad c^2 = w^2 + U^2 + 2Uw_\vartheta$$

$$I = h_0 - Uc_\vartheta = h + \frac{1}{2}(w^2 + U^2 + 2Uw_\vartheta) - U(w_\vartheta + U)$$

- Possiamo scrivere:

$$I = h + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}U^2 = h_{0rel} - \frac{1}{2}U^2$$

Equazione di Bernoulli

- Se consideriamo l'equazione dell'energia precedentemente vista:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left[\left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right)\right]$$

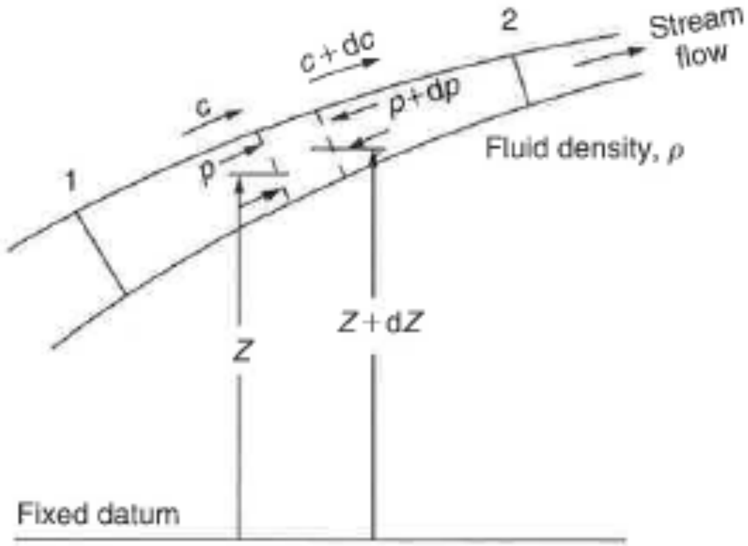
- E l'applichiamo al caso di flusso adiabatico e senza scambio di lavoro:

$$\left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

Equazione di Bernoulli

- Consideriamo un volume di controllo infinitesimo possiamo scrivere:

$$dh + cdc + gdz = 0$$



- Se non ci sono forze

tangenziali agenti sul fluido:

$$dh = vdp = dp/\rho \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{\rho} + cdc + gdz = 0$$

Equazione di Bernoulli

- Integrando l'equazione si ottiene:

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

- Che definendo $p_0 = p + \frac{1}{2}\rho c^2$ diventa per un fluido incomprimibile:

$$\frac{1}{\rho}\left(p_{02} - p_{01}\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

Equazioni per fluidi comprimibili

- Si definisce numero di Mach il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono:

$$M = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\gamma RT}}$$

- Quando M supera 0.3 il fluido viene considerato comprimibile e la densità non può essere più considerata costante.

Temperatura totale

- La definizione di entalpia totale può essere riscritta:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}c^2 \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}c^2 = c_p T + \frac{1}{2}M^2 \gamma R T$$

- E dato che

$$\gamma R = (\gamma - 1) c_p \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Pressione totale

- La pressione totale è pari alla pressione statica quando il fluido viene arrestato con una trasformazione isentropica:

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

- Combinando con l'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene:

$$\rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{c_p dT}{RT} = \frac{dT}{T}\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \Rightarrow \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

Densità totale e portata adimensionale

- Se applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti:
$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/\gamma-1}$$

- Se applichiamo le relazioni appena viste nell'equazione di continuità otteniamo:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{c_p T_0}}{A_n p_0}=\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)}$$

Definizioni di rendimento

- Rendimento globale di una turbina:

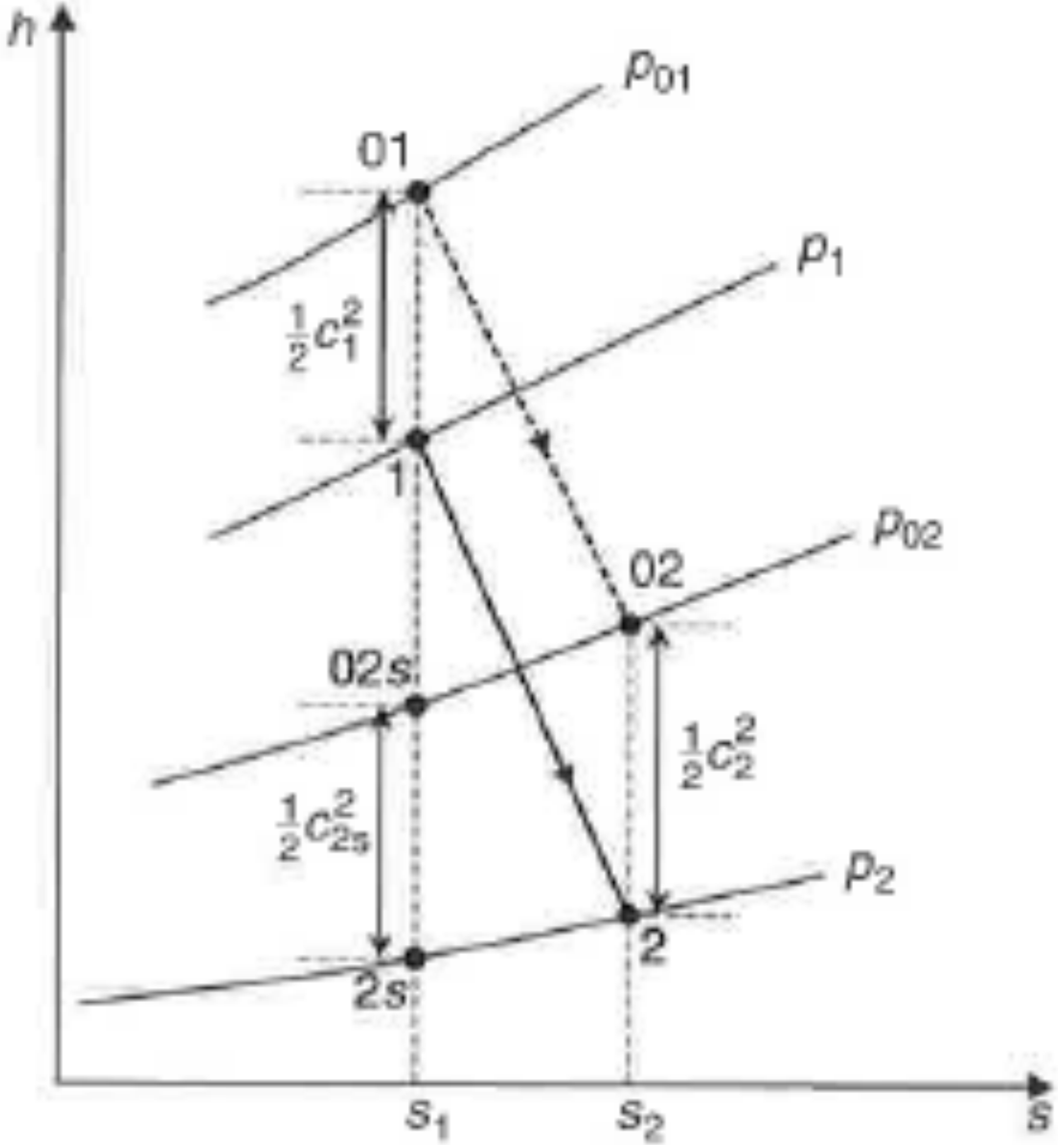
$$\eta_0 = \frac{energia\ meccanica\ disponibile\ all'\ albero}{massima\ variazione\ dell'\ energia\ del\ fluido}$$

- Rendimento isentropico di una turbina:

$$\eta_t = \frac{energia\ meccanica\ fornita\ al\ rotore}{massima\ variazione\ dell'\ energia\ del\ fluido}$$

$$\eta_t = \frac{lavoro\ reale}{lavoro\ ideale} = \frac{\Delta W_x}{\Delta W_{\max}}$$

Definizioni di rendimento



Definizioni di rendimento

- Nelle turbine a gas e a vapore il lavoro reale è dato da:

$$\Delta W_x = \dot{W}_x / \dot{m} = h_{01} - h_{02} = \left(h_1 - h_2\right) + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_2^2\right)$$

- Il lavoro massimo (lungo una isentropica) è dato da:

$$\Delta W_{\max} = \dot{W}_{max} / \dot{m} = h_{01} - h_{02s} = \left(h_1 - h_{2s}\right) + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_{2s}^2\right)$$

- Da cui possiamo definire il rendimento totale/totale:

$$\eta_{tt} = \Delta W_x / \Delta W_{max} = \left(h_{01} - h_{02}\right) / \left(h_{01} - h_{02s}\right)$$

Definizioni di rendimento

- Se l’energia cinetica allo scarico non può essere utilizzata, possiamo scrivere il lavoro ideale come:

$$\Delta W_{\max} = \dot{W}_{max} / \dot{m} = h_{01} - h_{2s} = \left(h_1 - h_{2s}\right) + \frac{1}{2} c_1^2$$

- Da cui il rendimento totale/statico:

$$\eta_{ts} = \Delta W_x / \Delta W_{max} = \left(h_{01} - h_{02}\right) / \left(h_{01} - h_{2s}\right)$$

- Il rendimento totale/statico sarà sempre minore del rendimento totale/totale

Definizioni di rendimento

- Nei compressori possiamo definire il rendimento globale come segue:

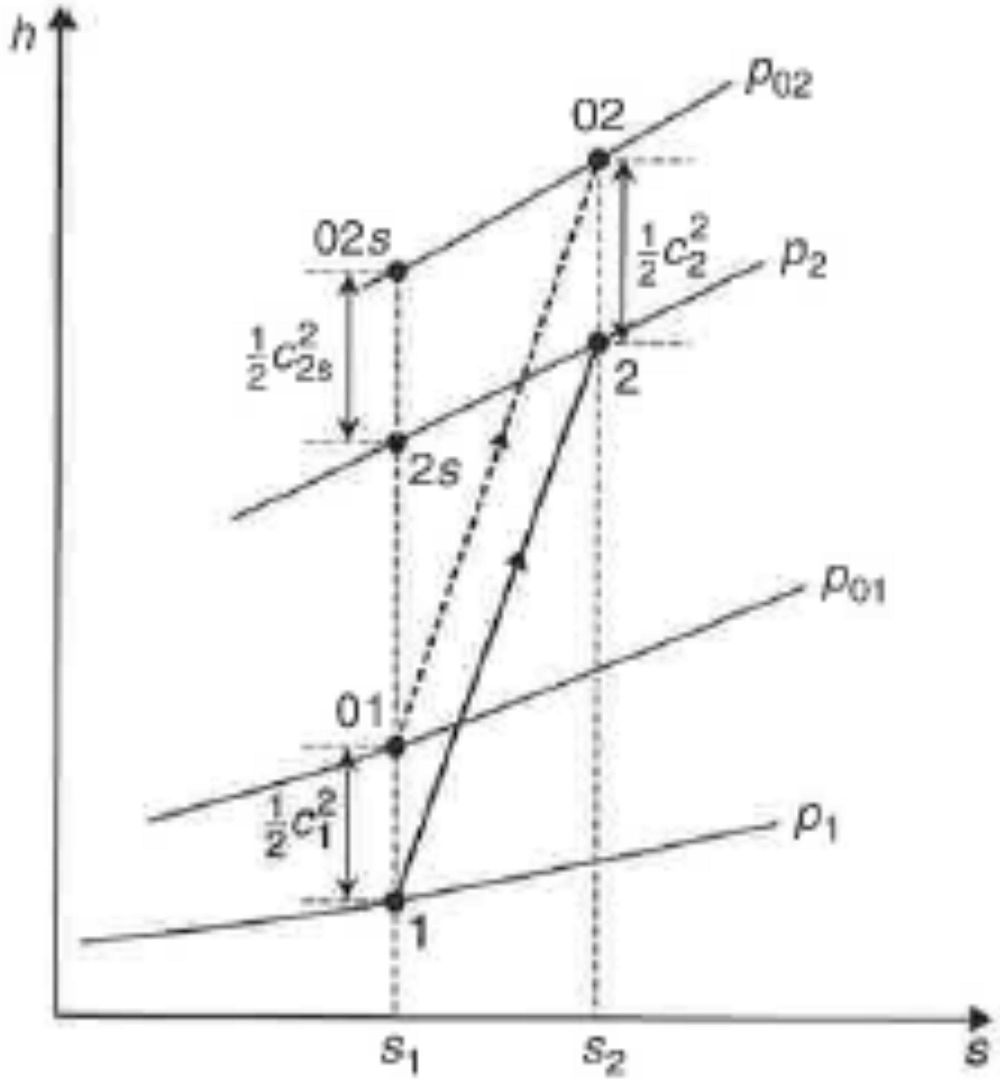
$$\eta_0 = \frac{energia\ fornita\ al\ fluido}{energia\ meccanica\ fornita\ all'\ albero}$$

- Il rendimento isentropico è invece definito come:

$$\eta_c = \frac{energia\ fornita\ al\ fluido}{energia\ meccanica\ fornita\ al\ rotore}$$

$$\eta_c = \frac{lavoro\ ideale}{lavoro\ reale} = \frac{\Delta W_{\min}}{\Delta W_c}$$

Definizioni di rendimento



Definizioni di rendimento

- Nei compressori il lavoro reale è dato da:

$$\Delta W_c = \dot{W}_c / \dot{m} = h_{02} - h_{01} = \left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right)$$

- Il lavoro massimo (lungo una isentropica) è dato da:

$$\Delta W_{\min} = \dot{W}_{\min} / \dot{m} = h_{02s} - h_{01} = \left(h_{2s} - h_1\right) + \frac{1}{2}\left(c_{2s}^2 - c_1^2\right)$$

- Da cui possiamo definire il rendimento:

$$\eta_c = \Delta W_{\min} / \Delta W_c = \left(h_{02s} - h_{01}\right) / \left(h_{02} - h_{01}\right)$$