

Esercizi sul metodo di iterazione funzionale

1. Considerare la funzione $f(x) = 5 + 4 \sin(x) - 5x$. Dimostrare che f ha uno e un solo zero α nell'intervallo $[0, 2]$.
2. Considerare l'equazione di punto fisso $g(x) = x$, con $g(x) = 1 + \frac{4}{5} \sin(x)$. Dimostrare che essa ha le stesse soluzioni di $f(x) = 0$.
3. Dimostrare che il metodo del punto fisso applicato a $g(x)$ con punto di partenza $x_0 = 1$ converge. È sufficiente dimostrare che $|g'(x)| < 1$ per $x \in [0, 2]$ per concluderlo?
4. Scrivere una **function** `x=puntofisso(g, x0, k)` che esegue k passi del metodo del punto fisso e restituisce l'approssimazione della soluzione ottenuta.
5. Scrivere una variante **function** `x=puntofisso2(g, x0, epsilon)` che esegue un numero arbitrario di passi del metodo, fermandosi alla prima iterazione h per cui $|x_h - x_{h-1}| < \varepsilon$.
6. Scrivere una variante **function** `x=puntofisso3(g, x0, k, epsilon)` che si ferma quando sono state eseguite k iterazioni oppure quando $|x_h - x_{h-1}| < \varepsilon$.
7. I prossimi punti hanno lo scopo di produrre un grafico simile a quello della Figura ???. Questo grafico mostra che le iterate del metodo del punto fisso si possono ottenere tracciando su un grafico linee orizzontali e verticali, alternativamente, che vanno dal grafico della funzione data al grafico della bisettrice $y = x$ e viceversa. Scrivere una **function** `itermatrix(g,x0)` che esegue 20 passi del metodo del punto fisso e restituisce la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 \\ x_0 & x_1 \\ x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ x_2 & x_2 \\ \vdots & \\ x_{19} & x_{20} \\ x_{20} & x_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{41 \times 2}.$$

8. Scrivere una **function** `iterplot(g,a,b)` che disegna sullo stesso grafico le funzioni $y = g(x)$, $y = x$ nell'intervallo $[a, b]$, e la spezzata `plot(M(:,1),M(:,2))`,

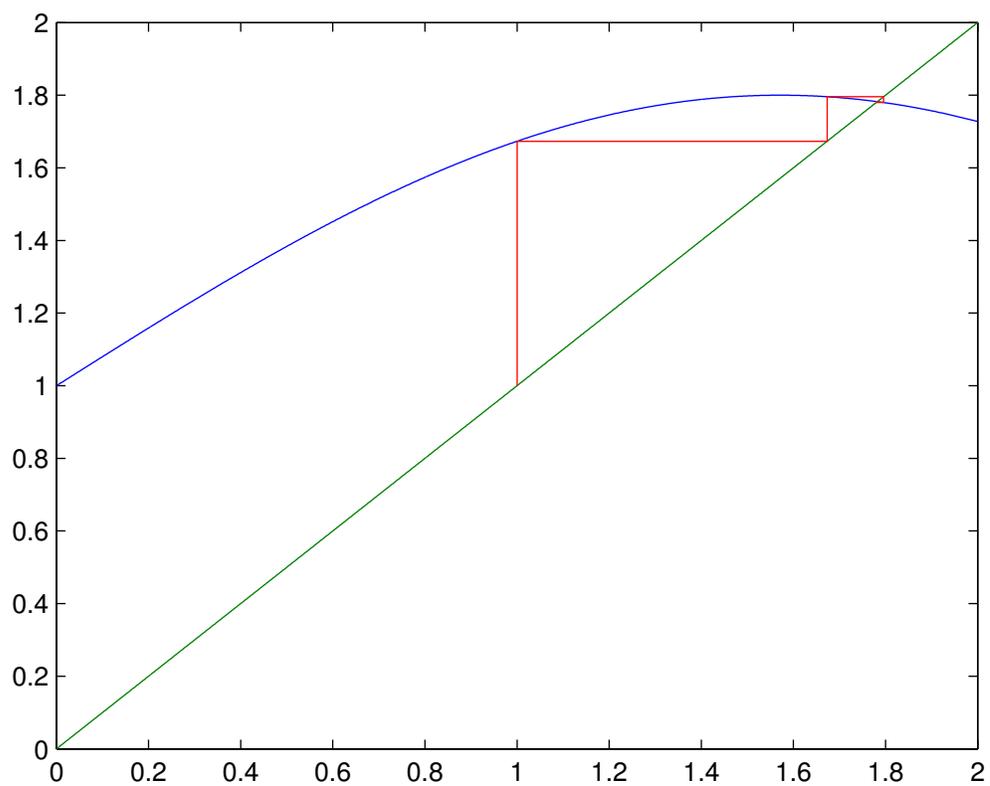


Fig. 1: Grafico che illustra il comportamento dell'iterazione di punto fisso.

con M restituita dalla funzione del punto precedente e $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Applicarla con la $g(x)$ definita sopra su $[0, 2]$.

9. Disegnare lo stesso grafico per $g(x) = 3 + 2 \sin(x)$ nell'intervallo $[2, 4]$, per $g(x) = 1 - \frac{4}{5} \sin(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$ e per $g(x) = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \sin(x)$ in $[-2, 0]$. Notare i diversi comportamenti di convergenza.