Programma di Algebra Lineare

per il Corso di Laurea Ingegneria dell'energia.

Docente: Francesca Acquistapace

- Geometria analitica
  - Rette e piani nello spazio a tre dimensioni e loro posizioni reciproche
  - Ortogonalità e parallelismo
  - Proiezioni ortogonali
  - Prodotto scalare e sua bi-linearità
  - Applicaziooni
- Sistemi lineari
  - Matrice associata.
  - Definizione di soluzione.
  - La matrice A come applicazione di $\mathbb{R}^q \in \mathbb{R}^p$ che associa a $X \in \mathbb{R}^q$ il vettore di $\mathbb{R}^p$ che è combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti le coordinate di X.
  - Le soluzioni come intersezione di iperpiani.
  - Operazioni di Gauss. Esse non cambiano l'insieme delle soluzioni.
  - Riduzione a scala con il metodo di Gauss.
  - Variabili libere e pivots. Esempi.
- Spazi vettoriali
  - Struttura di $\mathbb{R}^n$,
  - Spazi vettoriali, esempi: $\mathbb{R}[x]$, matrici, funzioni $A \to \mathbb{R}$, Funzioni continue sull'intervallo $[0, 1]$.
  - Sottospazi. Soluzioni di un sistema omogeneo come sottospazio di $\mathbb{R}^q$.

- Combinazioni lineari, dipendenza e indipendenza lineare.
- W e' sottospazio se e solo se è chiuso per combinazioni lineari.
- Span di una famiglia di vettori (anche infinita).
- Base di uno spazio vettoriale.
- Una base e'un insieme massimale di vettori indipendenti e un insieme minimale di generatori.
- Teorema del completamento.
- Teorema: ogni spazio vettoriale ha una base. Prova solo per spazi V =span$\{v_1, ..., v_k\}$.
- Base = vettori indipendenti tra i vettori $\{v_1, ..., v_k\}$.
- Sottospazi, calcolo di basi, in particolare dello spazio di soluzioni di un sistema omogeneo.
- Intersezione e somma di sottospazi.
- Teorema di Grassman,
- Somme dirette, supplementari, esempio un sottospazio ed il suo ortogonale.
- Azione di una matrice a p righe e q colonne su $\mathbb{R}^q$.
- Applicazioni lineari.
- Le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^q$ in $\mathbb{R}^p$ sono matrici a p righe e q colonne.
- Dati valori in W a una base di V, c'è un'unica applicazione lineare $V \to W$ con quei valori.
- Nucleo e Immagine di una applicazione lineare.
- Struttura lineare dell'insieme di applicazioni lineari tra V e W.
- Teorema della dimensione.
- Rango di un'applicazione lineare.
- A e A^T hanno lo stesso rango
- Isomorfismo tra $L(V, W)$ e lo spazio delle matrici di giusta stazza.
- Applicazione ai sistemi lineari: le equazioni sono elementi di $L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ e le operazioni di Gauss calcolano una base dello span di questi elementi.
- Matrice associata a $Id : V- > V$.

- Prodotto di matrici righe per colonne corrisponde alla composizione.
- Regole del prodotto (distributività a destra e a sinistra, moltiplicazione per un numero).
- Unicità dell'inversa di una matrice quadrata di rango massimo.
- Calcolo dell'inversa con il metodo di Gauss.
- Inversa di un prodotto, trasposta di un prodotto. Inversa della trasposta di una matrice invertibile.
- Teorema: nello spazio delle matrici quadrate $n \times n$ le matrici non invertibili sono divisori di zero a destra e a sinistra.

• Determinanti

- Determinanti nel caso 2×2.
- Proprietà richieste: linearità sulle righe, annullarsi se due righe sono uguali, valore 1 su I.
- Conseguenze delle proprietà richieste: valore obbligato su matrici diagonali, su matrici triangolari superiori e quindi sulle matrici a scala.
- Unicità.
- Esistenza (con la regola di Laplace per colonna).
- Si può fare per righe. $d(A) = d(A^T)$.
- Teorema di Binet.

• Endomorfismi di uno spazio vettoriale

- Classe di similitudine di una matrice quadrata.
- Il centro di $GL(n, \mathbb{R})$.
- Autovettori ed autovalori.
- Polinomio caratteristico e sua invarianza per similitudine.
- Traccia e determinante sono invarianti per similitudine.
- Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore.
- Criterio di diagonalizzazione.
- Il polinomio minimo.
- Criterio di diagonalizzazione tramite polinomio minimo.

- Triangolabilità.
- Matrici nilpotenti.

- Prodotto scalare e matrici
  - Matrici ortogonali, caratterizzazione. Il caso $n = 2$ e $n = 3$.
  - Tutti gli autovalori (reali e complessi) di una matrice ortogonale hanno modulo 1.
  - Decomposizione di $\mathbb{R}^n$ in somma diretta ortogonale di spazi invarianti per una applicazione ortogonale.
  - Matrici simmetriche.
  - Teorema spettrale: A è simmetrica se e solo se in $\mathbb{R}^n$ c'è una base ortonormale di autovettori per A.