

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Secondo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in \mathbf{R}^5 possono essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0, 0, 0, 0, 0)$, che si intersecano solo in $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Si assuma che dati quattro elementi di \mathbf{R}^4 linearmente indipendenti, ogni altro elemento di \mathbf{R}^4 si scrive come somma di loro multipli reali.

b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in \mathbf{R}^4 con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0, 0, 0, 0)$, che si intersecano solo in $(0, 0, 0, 0)$, si intersecano in almeno un punto.

c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in \mathbf{R}^4 con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0, 0, 0, 0)$ con intersezione non solo $\{(0, 0, 0, 0)\}$, possono aver intersezione vuota.

Domanda 2 Trovare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4, 5)$ sulla retta $t(1, 1, 2, 1, 3)$, $t \in \mathbf{R}$.

Domanda 3 a- Mostrare che le soluzioni del sistema nelle variabili $(x, y, z, u, v) \in \mathbf{R}^5$ determinano

un piano bidimensionale
$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$$

b- Descrivere in forma parametrica tale piano bidimensionale.

Domanda 4 a- Trovare delle equazioni cartesiane che determinino l'ortogonale del piano bidimensionale di \mathbf{R}^5 definito da

$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases}$$

b- Descrivere in forma parametrica tale ortogonale.

Domanda 5 Trovare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4, 5)$ sul piano bidimensionale di \mathbf{R}^5 definito

da
$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases} .$$

Domanda 6 Calcolare la distanza di $(1, 2, 3, 4, 5)$ dal piano bidimensionale di \mathbf{R}^5 definito da

$$\begin{cases} x + y + 3z + u + 4v = 0 \\ x + y + 3z + 2u + 3v = 0 \\ x + y - z + u + 2v = 0 \end{cases} .$$

Domanda 7 Calcolare la distanza di $(1, 2, 3, 4, 5)$ dal piano bidimensionale di \mathbf{R}^5 dato in forma parametrica da $s(1, 1, 1, 0, 1) + t(1, 0, 1, 1, 1)$, $t, s \in \mathbf{R}$.

Domanda 8 Determinare la proiezione ortogonale della retta in \mathbf{R}^4 data in forma parametrica

$t(1, 1, 1, 1)$, $t \in \mathbf{R}$ sul piano bidimensionale in \mathbf{R}^4 definito da
$$\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases} .$$

Domanda 9a- Verificare che le equazioni
$$\begin{cases} x + 2y + 2z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \\ x - y - z + u = 0 \end{cases} , (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4,$$

individuano una retta in \mathbf{R}^4 .

b- Nel caso trovare delle equazioni per la sua proiezione ortogonale sul piano bidimensionale in \mathbf{R}^4

definito da
$$\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases} .$$

Domanda 10 Determinare la proiezione ortogonale della retta di \mathbf{R}^4 individuata da

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x - y + z + 2u = 1 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases} , \text{ sul piano definito da } \begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases} .$$

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1.

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ le equazioni $\begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \end{cases}$,
 $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$, individuano una retta?
2. Per quali tra questi parametri la retta non ha intersezione con il piano bidimensionale in \mathbf{R}^4 definito da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$?
3. Per quali di quest'ultimi parametri la retta non ha traslate contenute nello stesso piano?

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2.

Si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la dimensione dell'insieme delle eventuali soluzioni del

$$\text{ sistema nelle variabili } (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4 \begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \\ \alpha x + y - z + u = 0 \end{cases} .$$

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + v + 4w = a \\ x + y + 3z + 2v + 3w = b \\ x + y - z + v + 2w = c \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$, scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 4.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 3 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & e \\ 4 & 3 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ 3x + 3y - z = c \\ 0 = d \\ x + 2y + z = e \\ 4x + 3y + 2z = f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;

- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 5.

1. Si riduca a scala la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 3 & -1 & -4 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & 3 & e \\ 4 & 3 & 2 & 2 & f \end{pmatrix}.$$

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + 2u = a \\ x + y + z + 2u = b \\ 3x + 3y - z - 4u = c \\ 0 = d \\ x + 2y + z + 3u = e \\ 4x + 3y + 2z + 2u = f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$;

- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

